УДК 539.374

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

С. В. Иванова

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

В настоящей работе определяются перемещения в упругопластической толстой плите, ослабленной эллиптическим отверстием, находящейся под действием растягивающих усилий.

The shifts in the elastoplastic thick slab weakened by an elliptic aperture being under the influence of stretching efforts are defined in the following work.

Ключевые слова: *напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия.*

Для определения перемещения будем считать определенным напряженное состояние. Уравнения для определения компонентов напряжений и перемещений в пластической области принадлежат гиперболическому типу.

Для определения напряжений вблизи отверстия имеет место задача Коши, и идеальнопластическое состояние определяется условиями на границе отверстия. Далее из условия сопряжения на границе пластической области и напряженного состояния на бесконечности определяется напряженное состояние в упругой зоне.

Деформированное состояние определяется в обратном порядке. Вначале по известным компонентам напряжения определяется деформированное состояние в упругой области, а далее из условий сопряжения перемещения на границе упругопластической зоны по известным уравнениям для компонентов перемещения в пластической области определяются компоненты деформации в пластической зоне.

Определим перемещения в упругой и пластической областях. В исходном нулевом приближении в упругих и пластических областях имеет место условие несжимаемости

$$e_r^{(0)} + e_q^{(0)} = 0. \tag{1}$$

Согласно (1) перемещения и деформации в упругой и пластической областях примут вид

$$u^{(0)} = \frac{1}{2G\rho}, v^{(0)} = 0, e_\rho^{(0)} = -\frac{2}{G\rho}, e_\theta^{(0)} = \frac{2}{G\rho^2}, e_{\rho\theta}^{(0)} = 0\,. \tag{2}$$

В упругой области согласно [1] и формулам (I), (VI), (VIII), приведенным в монографии [2], получим

$$u^{(I)e} = -\frac{1+m}{rE}\left[m\left(\ln^2 r + \ln r\,\frac{a-1}{4} \right) - \frac{(a+b)\left(4-a^2\right)}{4a^2} \right] -$$

$$-\frac{1}{E}\left[\frac{(1+m)}{3r^3}\left(A_2 - 2B_2\right) - \frac{2}{r}\left(A_2 - B_2\right) \right]\cos 2q + \qquad (3)$$

$$+\frac{1}{E}\left(\frac{1+m}{5r^5}(2A_4 - 3B_4) - \frac{3+m}{3r^3}\left(A_4 - B_4\right) \right)\cos 4q \Bigg],$$

$$v^{(I)e} = \frac{1}{E}\left[\frac{(1+m)}{3r^3}\left(A_2 - 2B_2\right) - \frac{m-1}{r}\left(A_2 - B_2\right) \right]\sin 2q +$$

$$+\left(\frac{1}{5r^5}(1+m)\left(2A_4 - 3B_4\right) - \frac{2m}{3r^3}\left(A_4 - B_4\right) \right)\sin 4q \Bigg].$$

Имеет место условие пластичности

$$\left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q \right] + 4t_{rq}^{(p)2}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q \right] +$$

$$+2\left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)t_{rq}^{(p)}\left[\frac{A-B}{2}\sin 4q \right] = \left(2 + ms\right)^2, \qquad (4)$$

В пластической зоне согласно условию пластичности (4) и ассоциированному закону течения имеют место следующие соотношения:

$$e_r = e_r^p = l\,\frac{\partial f}{\partial s_r} = l\left[2\left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q \right] + \right.$$

$$\left. +t_{rq}\left(A-B\right)\sin 4q - m\left(2+ms\right) \right],$$

$$e_q = e_q^p = l\,\frac{\partial f}{\partial s_q} = l\left[-2\left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q \right] - \right.$$

$$\left. -t_{rq}\left(A-B\right)\sin 4q - m\left(2+ms\right) \right], \qquad (5)$$

$$e_{rq} = e_{rq}^p = l\,\frac{\partial f}{\partial t_{rq}} = 4t_{rq}^{(p)}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q \right] +$$

$$+\left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)\left[\frac{A-B}{2}\sin 4q \right].$$

Из (4) следует

$$\frac{e_r^p}{\partial f/ds_r} = \frac{e_q^p}{\partial f/ds_q} = \frac{e_{rq}^p}{\partial f/dt_{rq}} = l. \qquad (6)$$

В соотношениях (6) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне при возрастании нагрузки, причем при $t = 0$ имеют место равенства $e_r^p = e_q^p = e_{rq}^p = 0$. Момент времени $t = 0$ для каждой точки *A* отсчитывается от момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при $t = 0$, т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести. Перепишем соотношения (6) в виде

$$\frac{e_r - e_r^e}{\partial f / ds_r} = \frac{e_q - e_q^e}{\partial f / ds_q} = \frac{2\left(e_{rq} - e_{rq}^e\right)}{\partial f / dt_{rq}}. \tag{7}$$

С учетом (5) соотношения (7) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{e_r - e_r^e}{2\left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q\right] + t_{rq}(A-B)\sin 4q - m(2+ms)} = \\ = \frac{e_q - e_q^e}{-2\left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q\right] + t_{rq}(A-B)\sin 4q - m(2+ms)} = \\ = \frac{2\left(e_{rq} - e_{rq}^e\right)}{4t_{rq}^{(p)}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4q\right] + \left(s_r^{(p)} - s_q^{(p)}\right)\left[\frac{A-B}{2}\sin 4q\right]} = l.\end{gathered} \tag{8}$$

Упругие деформации при $m = \frac{1}{2}$ примут вид

$$\begin{gathered}\varepsilon_\rho^e = \frac{1}{4G}\left(\sigma_\rho - \sigma_\theta\right), \varepsilon_\theta^e = \frac{1}{4G}\left(\sigma_\theta - \sigma_\rho\right), \varepsilon_{\rho\theta}^e = \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G}, \\ \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\theta^e = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Из (5) следует

$$e_r^{(I)} + e_q^{(I)} = -4 l^0 m, \tag{10}$$

где

$$l^{(0)} = -\frac{1}{8G}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right).$$

Из (10) получим

$$e_r^{(I)} + e_q^{(I)} = e_r^{(I)e} + e_q^{(I)e} + e_r^{(I)p} + e_q^{(I)p} = \frac{m}{2G}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right). \tag{11}$$

Согласно [2] запишем соотношения для деформаций

$$e_r = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial r}, e_q = \frac{1}{r}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial q} + \frac{u^{(n)}}{r}, e_{rq} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v^{(n)}}{\partial r} - \frac{v^{(n)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial q}\right]. \tag{12}$$

Из соотношения (8) найдем

$$e_{rq}^{(I)} = \frac{t_{rq}^{(I)p}}{2G}\left(2 - \frac{1}{r^2}\right). \tag{13}$$

Согласно (11), (12) и (13) с учетом $e_r^{(I)e} + e_q^{(I)e} = 0$ дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид

$$\frac{\partial u^{(I)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v^{(I)}}{\partial q}+\frac{u^{(I)}}{r}=-\frac{m}{2G}\left(\frac{1}{r}-1\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial q}=-\frac{t_{rq}^{(I)p}}{2G}\left(\frac{1}{r^2}-2\right). \tag{15}$$

Из уравнений (14), (15) получим

$$\begin{aligned} u^{(I)\ p} &= \frac{C_{00}{}^*}{r}+\frac{m}{2Gr}(r^2-2\ln r)-2\left(C_{21}{}^*\cos(\sqrt{3}\ln r)+C_{22}{}^*\sin(\sqrt{3}\ln r)\right)\cos 2q+ \\ &\quad -4\left(C_{41}{}^*\cos(\sqrt{15}\ln r)+C_{42}{}^*\sin(\sqrt{15}\ln r)\right)\cos 4q+ \\ v^{(I)p} &= \frac{3t_{rq}^{(I)p}}{4Gr}+\left(\left(\sqrt{3}C_{22}{}^*+C_{21}\right)\cos(\sqrt{3}\ln r)+\left(C_{22}{}^*-\sqrt{3}C_{21}\right)\sin(\sqrt{3}\ln r)\right)\sin 2q+ \\ &\quad +\left(\left(\sqrt{15}C_{42}{}^*+C_{41}{}^*\right)\cos(\sqrt{15}\ln r)+\left(C_{42}{}^*+\sqrt{15}C_{41}{}^*\right)\sin(\sqrt{15}\ln r)\right)\sin 4q. \end{aligned} \tag{16}$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$u_r^p\Big|_{r=1}=u_r^e\Big|_{r=1};\ v_{rq}^p\Big|_{r=1}=v_{rq}^e\Big|_{r=1}. \tag{17}$$

Коэффициенты $C_{00}^*, C_{21}^*, C_{22}^*, C_{41}^*, C_{42}^*$ определим из (3) и условия сопряжения (17)

$$\begin{aligned} C_{00}{}^* &= -\frac{m}{2G}-\frac{1+m}{E}\left[m\left(\ln^2 1/a+\ln 1/a+\frac{a-1}{4}\right)-\frac{(a+b)(4-a)}{4a^2}\right], \\ C_{21}{}^* &= -\frac{5-m}{12E}(A_2-2B_2), \\ C_{22}{}^* &= \frac{5m-1}{12\sqrt{3}E}(A_2-B_2)-\frac{m-1}{\sqrt{3}E}(A_2-B_2), \\ C_{41}{}^* &= -\frac{1}{4E}\left[\frac{1+m}{5}(2A_4-3B_4)-\frac{3+m}{3}(A_4-B_4)\right], \\ C_{42}{}^* &= (2A_4-3B_4)\frac{1+m}{4\sqrt{15}E}-(A_4-B_4)\frac{1+3m}{4\sqrt{15}E}, \end{aligned} \tag{18}$$

где коэффициенты A_2, A_4, B_2, B_4 определены согласно [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова, С. В.* Упругопластическое напряженное состояние толстой плиты из анизотропного сжимаемого материала, ослабленной эллиптическим отверстием / С. В. Иванова // Научный сборник по широкому спектру проблем строительной механики и теории сооружений. – Саратов : СГТУ, 2010. – С. 116–123.
2. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 202 с.