

УДК 539.374

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Т. Н. Павлова

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева»

В настоящей работе определяются перемещения в тонкой упругопластической пластине, ослабленной эллиптическим отверстием, находящейся под действием растягивающих усилий.

The shifts in the thin elastoplastic slab weakened by an elliptic aperture being under the influence of stretching efforts are defined in the following work.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия.

Для определения напряжения вблизи отверстия имеет место задача Коши и идеаль-нопластическое напряженное состояние определяется условиями на границе отверстия. Далее из условия сопряжения напряжений на границе пластической области и условия на бесконечности определяется напряженное состояние в упругой зоне.

Деформированное состояние определяется в обратном порядке. В начале по известным компонентам напряжения определяется деформированное состояние в упругой области, а далее из условий сопряжения перемещения на границе упругопластической зоны по известным уравнениям для компонентов перемещения в пластической области определяются компоненты деформации в пластической зоне.

Определим перемещение в пластической и упругой областях. Характер изменения деформированного состояния в некоторой точке P в процессе нагружения в рассматриваемом случае представляется следующим образом: сначала возрастают упругие деформации; затем, когда граница упругопластического состояния материала достигает точки P , процесс изменения упругих деформаций прекращается, так как изменения напряжений в пластической зоне в рассматриваемом случае не происходит. При дальнейшем возрастании нагрузок возникают пластические деформации.

Согласно [3] перемещения и деформации в упругой и пластической областях примут вид

$$u^0 = \frac{1}{2E}(\rho - \alpha(2 \ln \rho - 1)), v = 0, e_{\rho}^0 = \frac{1}{2E}(1 - \frac{2\alpha}{\rho}), \quad (1)$$

$$e_{\theta}^0 = \frac{1}{2E}(1 - \frac{\alpha}{\rho}(2 \ln \rho - 1)), e_{\rho\theta}^0 = 0.$$

В упругой области согласно [1], [3] получим

$$u_r^{0e} = \frac{1}{E} \left[(1+m) \left(-\frac{K}{r} \right) + \left(\frac{(1+m)}{3r^3} (N - 2\bar{N}) - \frac{2}{r} (N - \bar{N}) \right) \cos 2q + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{5r^5} (1+m)(2M - 3\overline{M}) - (1 + \frac{m}{3}) \frac{1}{r^3} (M - \overline{M}) \right) \cos 4q \Big], \\
 u_q^{0e} = & \frac{1}{E} \left[\left(\frac{(1+m)}{3r^3} (N - 2\overline{N}) - \frac{m-1}{r} (N - \overline{N}) \right) \sin 2q + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{5r^5} (1+m)(2M - 3\overline{M}) - \frac{2m}{3r^3} (M - \overline{M}) \right) \sin 4q \right],
 \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
 K = & (k_1' + k_2') \left(\ln a + \frac{3}{4} (1 - a^2) \right) + \frac{F^{(I)}}{2} (a^2 - 1), \\
 N = & a (k_1' - k_2') \left(a (25 \ln a - 2) + \frac{8}{3} \right) - a^2 d_1, \\
 M = & \frac{a}{2} (k_1' + k_2') \left(\frac{1}{2} + F' \right) (-a (2 - \ln a) - 225 (32 \ln a - 17)), \\
 \overline{N} = & a (k_1^{(I)} - k_2^{(I)}) (a \ln a - 4a - 2) - (2 + a d_1), \\
 \overline{M} = & 2a^2 \left(\frac{1}{2} + F' \right) (k_1' + k_2') (2 - \ln a).
 \end{aligned}$$

Имеет место условие пластичности

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{(s_r^p + s_q^p)^2}{4} - \frac{(s_r^p - s_q^p)^2}{4} \cos^2(2q) - t_{rq}^{(p)2} \sin^2(2q) \right] - \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \frac{(s_r^p + s_q^p)}{2} + \\
 & + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \left[\frac{s_r^p - s_q^p}{2} \cos(2q) + t_{rq}^p \sin(2q) \right] - \frac{(s_r^p - s_q^p) t_{rq}^p \cos(2q) \sin(2q)}{k_1 k_2} - \\
 & - F \left[\frac{s_r^p - s_q^p}{2} \sin(2q) - t_{rq}^p \cos(2q) \right]^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В пластической зоне согласно [3] и ассоциированному закону течения имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 e_r = e_r^p = l \frac{\partial f}{\partial s_r} = l \left[\frac{1}{k_1 k_2} \left(\frac{s_r^{(p)} + s_q^{(p)}}{2} - \frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \cos^2 2q \right) - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2q}{2} - \right. \\
 \left. - \frac{t_{rq}^p}{2k_1 k_2} \sin 4q - F \left(\frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \sin^2 2q - \frac{t_{rq}^p}{2} \sin 4q \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$e_q = e_q^p = l \frac{\partial f}{\partial s_q} = l \left[\frac{1}{k_1 k_2} \left(\frac{s_r^{(p)} + s_q^{(p)}}{2} + \frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \cos^2 2q \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) - \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2q}{2} - \right. \\ \left. + \frac{t_{rq}^p}{2k_1 k_2} \sin 4q + F \left(\frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \sin^2 2q - \frac{t_{rq}^p}{2} \sin 4q \right) \right].$$

Из (4) следует

$$\frac{e_r^p}{\partial f / \partial s_r} = \frac{e_q^p}{\partial f / \partial s_q} = \frac{e_{rq}^p}{\partial f / \partial t_{rq}} = l. \quad (5)$$

В соотношениях (5) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне при возрастании нагрузки, причем при $t = 0$ имеют место равенства $e_r^p = e_q^p = e_{rq}^p = 0$. Момент времени $t = 0$ для каждой точки A отсчитывается с момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при $t = 0$, т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести. Перепишем соотношения (5) в виде

$$\frac{e_r - e_r^e}{\partial f / \partial s_r} = \frac{e_q - e_q^e}{\partial f / \partial s_q} = \frac{2(e_{rq} - e_{rq}^e)}{\partial f / \partial t_{rq}} = l. \quad (6)$$

С учетом (5) соотношения (6) перепишем в виде

$$\frac{e_r - e_r^e}{\mathbf{A}} = \frac{e_q - e_q^e}{\mathbf{B}} = \frac{2(e_{rq} - e_{rq}^e)}{\mathbf{C}} = l, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{A} = \left[\frac{1}{k_1 k_2} \left(\frac{s_r^{(p)} + s_q^{(p)}}{2} - \frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \cos^2 2q \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2q}{2} - \right. \\ \left. - \frac{t_{rq}^p}{2k_1 k_2} \sin 4q - F \left(\frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \sin^2 2q - \frac{t_{rq}^p}{2} \sin 4q \right) \right], \\ \mathbf{B} = \left[\frac{1}{k_1 k_2} \left(\frac{s_r^{(p)} + s_q^{(p)}}{2} + \frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \cos^2 2q \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) - \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2q}{2} - \right.$$

$$+ \frac{t_{rq}^p}{2k_1k_2} \sin 4q + F \left(\frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \sin^2 2q - \frac{t_{rq}^p}{2} \sin 4q \right) \Bigg],$$

$$\mathfrak{C} = \left[-\frac{2t_{rq}^p}{k_1k_2} \sin^2 2q + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \sin 2q - \right.$$

$$\left. - \frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2k_1k_2} \sin 4q + F \left(2t_{rq}^p \cos^2 2q - \frac{s_r^{(p)} - s_q^{(p)}}{2} \sin 4q \right) \right].$$

Упругие деформации при $m = \frac{1}{2}$ примут вид

$$e_\rho^e = \frac{1}{E} \left(\sigma_\rho - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right), \quad (8)$$

$$e_\theta^e = \frac{1}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_\rho \right),$$

$$e_{\rho\theta}^e = \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G}.$$

Согласно [2] запишем соотношения для деформаций

$$e_r = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial r}, e_q = \frac{1}{r} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial q} + \frac{u^{(n)}}{r}, e_{rq} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^{(n)}}{\partial r} - \frac{v^{(n)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial q} \right]. \quad (9)$$

Согласно [2], (7), (8), (9) дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид:

$$\frac{\partial u^{(l)}}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[s_r' - s_q' \left(\frac{1}{2} - \ln r \right) + \right. \quad (10)$$

$$\left. + \left(\frac{k_2' + k_1'}{2} - \frac{k_2' - k_1'}{2} \cos 2q + (k_2' + k_1' + F') \sin^2 2q \right) \ln r \right],$$

$$\frac{\partial v^{(l)}}{\partial r} - \frac{v^{(l)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(l)}}{\partial q} = 2 \left(\frac{2a}{Er} + \frac{1}{2G} \right) t_{rq}' + \quad (11)$$

$$+ \frac{2a}{Er} (k_2' - k_1' + \frac{a}{2r} (k_2' + k_1' + F') \sin 4q).$$

Из уравнений (10), (11) получим

$$\begin{aligned}
u^{(I)p} = & (k_1' + k_2') \left[-a \ln r + \ln r \left(\ln a + \frac{3}{4} + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{r} \left(3 - \frac{F'}{2} \right) \right) + \frac{a^2}{2r} \left(\frac{3}{4} + F' \right) \right] - \\
& - \frac{F'}{2} \left(r + \frac{3a^2}{2r} + (1-r) \ln r \right) + \left[(k_1' - k_2') \left(a \ln^2 r \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{r} \right) + \frac{a^2}{r} \left(\ln a + \frac{\ln r}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \ln r \left(-a(6 \ln a - 5) - 4a - \frac{1}{r} (4a^2 + \frac{1}{2}) \right) \right) + \frac{1}{2} r + C_{21}^* \right] \cos 2q + \\
& + \left[(k_1' + k_2') \left(-\frac{a^2}{r} \left(\frac{1}{8} + 8 \ln a + \frac{3}{4} F' \right) - \frac{225}{2} \ln r \left(\frac{1}{2} + F' \right) (32 \ln a - 17) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{a^2 \ln r}{2r} \left(\frac{15}{2} + 17 F' \right) + \frac{1}{r} (1 - \ln r) \right) - \frac{1}{2} r (\ln r - 1) + C_{41}^* \right] \cos 4q, \\
v^{(I)p} = & \frac{C_{00}^*}{r} + \left[\frac{8a^2}{E} \left((k_1' - k_2') \left(-\ln r \left(1 + \frac{a}{r} \right) - \frac{a}{r} (2 - \ln a) \right) - \frac{a d_1}{r} \right) + \right. \\
& + \frac{2a}{G} \left((k_1' - k_2') \left(\frac{1}{2} \ln^2 r - r \right) + d_1 \ln r \right) + 2 \left[(k_1' - k_2') \times \right. \\
& \times \left(\ln^2 r \left(\frac{3a}{2} r - \frac{7a^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \ln r (ar(1 - 3(1 + 2 \ln a)) + a^2 \ln a + \right. \\
& + \frac{1}{4} r^2) + r(3a(5 + 2 \ln a) - \frac{1}{8} r) - \frac{a}{3} \ln^3 r \left. \right) + (-2C_{21}^* + C_{22}^* r) \left. \right] \sin 2q + \\
& + \left[\frac{4a}{E} \left(2a^2 \left(\frac{1}{2} + F' \right) (k_1' + k_2') \left(\frac{\ln r}{r} - 2 + \ln a \right) \right) + \frac{1}{G} \left((k_1' + k_2') (a^2 \ln r \times \right. \right. \\
& \times (2 - \frac{1}{2} \ln r - \ln a + 2F'(1 - \ln a)) \left. \right) - 4 \left[(k_1' + k_2') (-a^2 \ln r \times \right. \\
& \times (\frac{1}{8} + 8 \ln a + \frac{3}{4} F') - \frac{225}{2} (\frac{1}{2} + F') (32 \ln a - 17) r (\ln r - 1) - \\
& - \frac{a^2}{4} (\frac{15}{2} + 17 F') \ln^2 r + \frac{r^2}{4} - \frac{1}{4r^2} (\ln r - \frac{1}{2}) \left. \right) + \frac{F'}{4} r^2 (\frac{3}{2} - \ln r) + \\
& \left. \left. + (-4C_{41}^* + C_{42}^* r) \right] \sin 4q.
\end{aligned} \tag{12}$$

Из (3), (11) и условий сопряжения найдем коэффициенты $C_{00}^*, C_{21}^*, C_{22}^*, C_{41}^*, C_{42}^*$

$$C_{00}^* = 0,$$

$$C_{21}^* = \mathbb{A}_2 - \mathbb{M}_2,$$

$$\begin{aligned}C_{22}^* &= B_2 - N_2 + 2(A_2 - M_2), \\C_{41}^* &= A_4 - M_4, \\C_{42}^* &= B_4 - N_4 + 4(A_4 - M_4),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_0 &= -\frac{1}{E}(1+m)K, \\A_2 &= \frac{1}{E}\left(\frac{(1+m)}{3}(N-2\bar{N})-2(N-\bar{N})\right), \\A_4 &= \frac{1}{E}\left(\frac{1}{5}(1+m)(2M-3\bar{M})-(1+\frac{m}{3})(M-\bar{M})\right), \\B_2 &= \frac{1}{E}\left(\frac{(1+m)}{3}(N-2\bar{N})-(m-1)(N-\bar{N})\right), \\B_4 &= \frac{1}{E}\left(\frac{1}{5}(1+m)(2M-3\bar{M})-\frac{2m}{3}(M-\bar{M})\right), \\M_2 &= \frac{a^2}{2}(k_1' + k_2')\left(\frac{3}{4} + F'\right) - \frac{F'}{2}\left(1 + \frac{3a^2}{2}\right) + \\&\quad + (k_1' - k_2')(a^2(\ln a - 4) - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}, \\M_4 &= -a^2(k_1' + k_2')\left(\frac{1}{8} + 8\ln a + \frac{3}{4}F'\right) + \frac{3}{2}, \\N_2 &= (k_1' - k_2')\left[-\frac{8a^3}{E}(2 - \ln a - d_1) - \frac{2a}{G} + \right. \\&\quad \left. + 2\left(a^2\ln a + \frac{1}{4}\right) + 3a(5 + 2\ln a) - \frac{1}{8}\right], \\N_4 &= 4(k_1' + k_2')\left(\frac{1}{2} + F'\right)\left(\frac{2a^3}{E}(\ln a - 2) - \frac{225}{2}(32\ln a - 17) + \frac{3}{32}\right) + \frac{3}{8}F',\end{aligned}$$

где $K, M, N, \bar{M}, \bar{N}$ определены согласно [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицено, К. Б. Техническая академия / К. Б. Бицено, Р. Граммель. – Л. : Гостехиздат, 1950. – 900 с.
2. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
3. Павлова, Т. Н. Двуосное растяжение тонкой упругопластической анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием / Т. Н. Павлова // Научный сборник по широкому спектру проблем строительной механики и теории сооружений. – Саратов : СГТУ, 2010. – С. 183–190.