

УДК 539.374

ВОЗДЕЙСТВИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ НА КОНИЧЕСКУЮ ТРУБУ

Т. А. Кульпина

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева»

Рассмотрена коническая труба, находящаяся под воздействием различных касательных усилий и внутреннего давления. Определены компоненты напряженного состояния. Представленные результаты позволяют определить решения и исследовать новый класс задач теории идеальной пластичности.

A conic tube influenced by tangential forces and internal pressure is under analysis. The components of stress condition are defined. The results let define the solutions and research a new class of problems of ideal plasticity theory.

Ключевые слова: коническая труба, касательные усилия, давление.

Рассмотрим коническую трубу в пластической области в сферической системе координат (r, q, j) . Вычислим нормальные и касательные усилия, предполагая, что они не зависят от координаты j .

1. Предполагается, что на внутренней поверхности трубы действует касательное усилие $t_{rq}^0 \neq 0$. Тогда в нулевом приближении будем иметь

$$t_{rq}^0 \neq 0, \quad t_{rj}^0 = t_{qj}^0 = 0. \quad (1)$$

Предположим, что все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от q .

Тогда уравнения равновесия в сферической системе координат, учитывая условия (1), примут вид:

$$\begin{cases} \frac{ds_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dt_{rq}}{dq} + \frac{1}{r} [2s_r - (s_q + s_j) + t_{rq} \operatorname{ctg} q] = 0, \\ \frac{dt_{rq}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{ds_q}{dq} + \frac{1}{r} [3t_{rq} - (s_q - s_j) \operatorname{ctg} q] = 0, \\ \frac{dt_{rj}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dt_{qj}}{dq} + \frac{1}{r} [3t_{rj} + 2t_{qj} \operatorname{ctg} q] = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что $s_r = \frac{1}{2}(s_q + s_j)$;

тогда система (2) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{dt_{rq}}{dq} + t_{rq} \operatorname{ctg} q = 0, \\ \frac{ds_q}{dq} + 3t_{rq} - (s_q - s_j) \operatorname{ctg} q = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из первого уравнения системы (3) получим:

$$t_{rq} = \frac{C}{\sin q}. \quad (4)$$

$$(s_r - s_q)^2 + (s_q - s_j)^2 + (s_j - s_r)^2 + 6t_{rq}^2 = 6K^2. \quad (5)$$

Подставив в уравнение (5) первоначальные условия, имеем:

$$\begin{aligned} (s_q - s_j)^2 + 4t_{rq}^2 - 4K^2 &= 0, \\ s_q - s_j &= 2\sqrt{K^2 - t_{rq}^2}. \end{aligned}$$

Подставим последнее выражение во второе уравнение системы (3). Имеем:

$$\frac{ds_q}{dq} + \frac{3C}{\sin q} - 2\sqrt{K^2 - \frac{C^2}{\sin^2 q}} \operatorname{ctg} q = 0. \quad (6)$$

Решим уравнение (6)

$$\begin{aligned} s_q &= \int \left(2\sqrt{K^2 - \frac{C^2}{\sin^2 q}} \operatorname{ctg} q - \frac{3C}{\sin q} \right) dq = \int 2\sqrt{K^2 - \frac{C^2}{\sin^2 q}} \frac{d \sin q}{\sin q} - \int \frac{3C}{\sin q} dq. \\ s_q &= -\frac{2\sqrt{K^2 \sin^2 q - C^2}}{\sin q} - K \ln \left| \frac{\sqrt{K^2 \sin^2 q - C^2} - K \sin q}{\sqrt{K^2 \sin^2 q - C^2} + K \sin q} \right| - 3C \ln \left| \operatorname{tg} \frac{q}{2} \right| + C_1. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Предполагается, что на внутренней поверхности трубы действует усилие $t_{qj}^0 \neq 0$, тогда в нулевом приближении будем иметь

$$t_{qj}^0 \neq 0, \quad t_{qr}^0 = t_{rj}^0 = 0. \quad (8)$$

Предположим, что все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от q .

Система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{ds_q}{dq} - (s_q - s_j) \operatorname{ctg} q = 0, \\ \frac{dt_{qj}}{dq} + 2t_{qj} \operatorname{ctg} q = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из второго уравнения системы (9) получим:

$$t_{qj} = \frac{C}{\sin^2 q}. \quad (10)$$

Уравнение (5) примет вид:

$$s_q - s_j = 2\sqrt{K^2 - t_{qj}^2}. \quad (11)$$

Из первого уравнения системы (9), учитывая (11), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{ds_q}{dq} - 2\sqrt{K^2 - \frac{C^2}{\sin^4 q}} \operatorname{ctg} q &= 0, \\ s_q &= \int 2\sqrt{K^2 - \frac{C^2}{\sin^4 q}} \operatorname{ctg} q dq. \\ s_q &= \frac{m\sqrt{K^2 \sin^4 q - C^2}}{\sin^2 q} + \frac{m}{2} K \ln \left| \frac{\sqrt{K^2 \sin^4 q - C^2} - K \sin^2 q}{\sqrt{K^2 \sin^4 q - C^2} + K \sin^2 q} \right| + C_1. \end{aligned} \quad (12)$$

3. Предполагается, что на внутренней поверхности трубы действует касательное усилие $t_{rj}^0 \neq 0$, тогда в нулевом приближении будем иметь

$$t_{rj}^0 \neq 0, \quad t_{qj}^0 = t_{rq}^0 = 0. \quad (13)$$

Предположим, что все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от q .

Учитывая условия (13), система (2) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{ds_q}{dq} - (s_q - s_j)ctgq = 0, \\ 3t_{rj} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Из второго уравнения системы (14) получим

$$t_{rj} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (5) примет вид:

$$s_q - s_j = 2K. \quad (16)$$

Подставим выражение (16) в первое уравнение системы (14), имеем

$$\begin{aligned} \frac{ds_q}{dq} - 2Kctgq &= 0, \\ ds_q &= 2Kctgq dq, \\ s_q &= 2K \int ctgq dq = 2K \ln|\sin q| + C. \end{aligned} \quad (17)$$

II. 1. Предполагается, что на внутренней поверхности трубы действует касательное усилие $s_{rq}^0 \neq 0$. Тогда в нулевом приближении будут справедливы условия (1).

Предположим, что все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от q .

Тогда уравнения равновесия в сферической системе координат примут вид (2).

Предположим, что $s_q = \frac{1}{2}(s_r + s_j)$, тогда система (2) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{dt_{rq}}{dq} + \frac{3}{2}(s_r - s_j) + t_{rq}ctgq = 0, \\ \frac{ds_q}{dq} + 3t_{rq} - \frac{1}{2}(s_r - s_j)ctgq = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Подставив в уравнение (5) первоначальные условия, имеем:

$$s_r - s_j = \pm 2\sqrt{1 - t_{rq}^2} \quad \text{при } k=1. \quad (19)$$

Подставим (19) в первое уравнение системы (18):

$$\frac{dt_{rq}}{dq} + 3c\sqrt{1 - t_{rq}^2} + t_{rq}ctgq = 0, \quad \text{где } c = \pm 1. \quad (20)$$

Решение уравнения (20) находим приближенно, используя разложение $\sqrt{1 - t_{rq}^2}$ в ряд Тейлора:

$$\sqrt{1 - t_{rq}^2} = 1 - \frac{1}{2}t_{rq}^2 - \frac{1}{8}t_{rq}^4 + \dots \quad (21)$$

Учитывая (21), уравнение (20) примет вид:

$$\frac{dt_{rq}}{dq} = \frac{3c}{2} t_{rq}^2 - ctgq t_{rq} - 3c. \quad \text{М (22)}$$

Используя замену $\frac{3c}{2} t_{rq} = -\frac{U'_q}{U}$, уравнение (22) запишется в виде линейного уравнения 2-го порядка:

$$U'' + ctgq U'_q - \frac{9}{2} U = 0. \quad (23)$$

Используя замену $x = \cos q$, уравнение (23) примет вид:

$$(x^2 - 1)U''_{xx} + \frac{9}{2} U = 0. \quad (24)$$

Используя замену $2z = 1 + x$, получим уравнение:

$$z(1-z)U''_{zz} + \frac{9}{2} U = 0. \quad (25)$$

Искомые напряжения описываются из решения уравнения (25).

2. Предположим,

$$t_{qj}^0 \neq 0, \quad t_{rq}^0 = t_{rj}^0 = 0, \quad s_q = \frac{1}{2}(s_r + s_j). \quad (26)$$

Учитывая условия (26), система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(s_r - s_j) = 0, \\ \frac{ds_q}{dq} - \frac{1}{2}(s_r - s_j)ctgq = 0, \\ \frac{dt_{qj}}{dq} + 2t_{qj}ctgq = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Решив систему (27), имеем:

$$t_{qj} = \frac{1}{\sin^2 q}, \quad s_q \equiv const. \quad (28)$$

3. Предположим,

$$t_{rj} \neq 0, \quad t_{rq} = t_{qj} = 0, \quad s_q = \frac{1}{2}(s_r + s_j). \quad (29)$$

Учитывая условия (29), система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(s_r - s_j) = 0, \\ \frac{ds_q}{dq} - \frac{1}{2}(s_r - s_j)ctgq = 0, \\ 3t_{rj} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Решив систему (30), имеем:

$$t_{rj} = 0, \quad s_q \equiv const. \quad (31)$$

III. 1. Предполагается, что на внутренней поверхности трубы действует касательное усилие $t_{rq}^0 \neq 0$. Тогда в нулевом приближении будут справедливы условия (1).

Предположим, что все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от q .

Тогда уравнения равновесия в сферической системе координат примут вид (2).

Предположим, что $s_j = \frac{1}{2}(s_r + s_q)$, тогда система (2) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{dt_{rq}}{dq} + \frac{3}{2}(s_r - s_q) + t_{rq} \operatorname{ctg} q = 0, \\ \frac{ds_q}{dq} + 3t_{rq} - \frac{1}{2}(s_r - s_q) \operatorname{ctg} q = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Подставив в уравнение (5) первоначальные условия, имеем:

$$s_r - s_q = \pm 2\sqrt{1 - t_{rq}^2} \text{ при } k=1. \quad (33)$$

Подставим (33) в первое уравнение системы (32):

$$\frac{dt_{rq}}{dq} + 3c\sqrt{1 - t_{rq}^2} + t_{rq} \operatorname{ctg} q = 0, \text{ где } c = \pm 1. \quad (34)$$

Решение уравнения (34) находим приближенно, используя разложение $\sqrt{1 - t_{rq}^2}$ в ряд Тейлора:

$$\sqrt{1 - t_{rq}^2} = 1 - \frac{1}{2}t_{rq}^2 - \frac{1}{8}t_{rq}^4 + \dots \quad (35)$$

Учитывая (35), уравнение (34) примет вид:

$$\frac{dt_{rq}}{dq} = \frac{3c}{2}t_{rq}^2 - \operatorname{ctg} q t_{rq} - 3c. \quad (36)$$

Используя замену $\frac{3c}{2} = -\frac{U'_q}{U}$, уравнение (36) запишется в виде линейного уравнения 2-го порядка:

$$U'' + \operatorname{ctg} q U'_q - \frac{9}{2}U = 0. \quad (37)$$

Используя замену $x = \cos q$, уравнение (37) примет вид:

$$(x^2 - 1)U''_{xx} + \frac{9}{2}U = 0. \quad (38)$$

Используя замену $2z = 1 + x$, получим уравнение:

$$z(1 - z)U''_{zz} + \frac{9}{2}U = 0. \quad (39)$$

Искомые напряжения описываются из решения уравнения (39).

2. Предположим,

$$t_{qj}^0 \neq 0, \quad t_{rq}^0 = t_{rj}^0 = 0, \quad s_j = \frac{1}{2}(s_r + s_q). \quad (40)$$

Система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(s_r - s_j) = 0, \\ \frac{ds_q}{dq} - \frac{1}{2}(s_r - s_j) \operatorname{ctg} q = 0, \\ \frac{dt_{qj}}{dq} + 2t_{qj} \operatorname{ctg} q = 0. \end{cases} \quad (41)$$

Решив систему (41), имеем:

$$t_{qj} = \frac{1}{\sin^2 q}, \quad s_q \equiv \text{const}. \quad (42)$$

3. Предположим,

$$t_{rj} \neq 0, \quad t_{rq} = t_{qj} = 0, \quad s_j = \frac{1}{2}(s_r + s_q). \quad (43)$$

Учитывая условия (43), система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(s_r - s_q) = 0, \\ \frac{ds_q}{dq} - \frac{1}{2}(s_r - s_q) \operatorname{ctg} q = 0, \\ 3t_{rj} = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Решив систему (44), имеем:

$$t_{rj} = 0, \quad s_q \equiv \text{const}. \quad (45)$$

Результаты, представленные в статье, имеют фундаментальное значение и могут представлять интерес для всех, кто интересуется наукой о прочности – механикой деформируемого твердого тела. Полученные решения могут быть также приложены к различным задачам теории пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев, Д. Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Воронеж : Колос, 2005. – 205 с.
2. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
3. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – С. 33–185.
4. Михайлова, М. В. О влиянии сдвигов на упругоидеальнопластическое состояние пластины с круговым отверстием при двусосном растяжении / М. В. Михайлова, Л. И. Афанасьева // Проблемы механики неупругих деформаций. – М. : Физматлит, 2001. – С. 211–228.