УДК 514.756

СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ НОРМАЛЬНЫМ ОСНАЩЕНИЕМ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ, ПОГРУЖЕННОЙ В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

CONNECTIONS INDUCED BY NORMALIZATION OF REGULAR HYPER-BAND IMBEDDED IN THE PROJECTIVE SPACE

П. А. Фисунов

P. A. Fisunov

ФГБОУ ВПО «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия», г. Чебоксары

Аннотация. В статье представлены результаты изучения инвариантными методами дифференциально-геометрических исследований центропроективных связностей, индуцируемых при оснащении в смысле Нордена нормалями первого и второго родов регулярной гиперполосы, погруженной в n-мерное проективное пространство. Найдено несколько охватов тензоров, определяющих эти связности, выведены условия их совпадения. Получены условия взаимности нормализации и определены необходимые и достаточные условия того, чтобы индуцируемые в расслоениях нормалей связности были плоскими.

Abstract. The author presents the results of studying the differential-geometric research of center-projective connections induced by A. Norden normalization of the regular hyper-band imbedded in n-dimensional projective space by means of invariant methods. The research presents several scopes of tensors which determine these linear connections. The conditions of their coincidences are found out. The conditions of reciprocity of the normalizations and the criteria of linear connections induced in fiberings of normals being flat or semi-flat are proved.

Ключевые слова: *гиперполоса, проективное пространство, нормализация.*

Keywords: *hyper-band, projective space, normalization*.

Актуальность исследуемой проблемы. Двойственная геометрия регулярных голономных и неголономных гиперполос изучалась исследователями в различных пространствах. В данной работе на основе работ [6], [7] и [13] получены новые результаты для регулярных голономных гиперполос в проективном пространстве.

Материал и методика исследований. Объектом изучения в работе являются центропроективные связности, индуцируемые оснащением регулярной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. Для изучения используются такие инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, как метод продолжений и охватов Г. Лаптева, метод внешних дифференциальных форм Э. Картана, метод нормализации А. Нордена.

Результаты исследований и их обсуждение. Результаты являются новыми и достоверными, они неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах и конференциях различных рангов.

На протяжении всего изложения будем считать, что индексы принимают следующие значения:

$$\bar{J},\bar{K},\bar{L}=\overline{0,n};\;\; J,K,L,P,Q=\overline{1,n};\;\; i,j,k,s,t=\overline{1,m};\;\; \bar{i},\bar{j},\bar{k}=\overline{0,m};$$
$$u,v,w,x=\overline{m+1,n-1};\; \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n};\;\; \bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}=0,\overline{m+1,n};\; p=\overline{1,3};\; \bar{p}=\overline{0,3}.$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера $\{A_{\bar{J}}\}$ n-мерного проективного пространства P_n имеют вид:

$$dA_{\bar{J}}=\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}A_{\bar{K}}\,; \tag{1}$$

дифференциальные формы Пфаффа $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ соответствуют структурным уравнениям проективного пространства, указанным в работе [11]:

$$D\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}=\omega_{\bar{J}}^{\bar{L}}\wedge\omega_{\bar{L}}^{\bar{K}},\;\; \omega_{\bar{L}}^{\bar{L}}=0\,. \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения регулярной гиперполосы [2] $H_m\subset P_n$ ($m<n-1$) в репере первого порядка имеют вид [7]:

$$\omega_o^{\alpha}=\omega_v^n=0,\;\; \omega_i^n=\Lambda_{ij}^n\omega_o^j,\;\; \omega_i^v=\Lambda_{ij}^v\omega_o^j,\quad \omega_v^i=N_{vj}^i\omega_o^j\,. \tag{3}$$

Продолжая уравнения системы (3), имеем

$$\nabla\Lambda_{ik}^n+\Lambda_{ik}^n\omega_o^o=\Lambda_{ikj}^n\omega_o^j,\;\; \Lambda_{i[kj]}^n=0\,, \tag{4}$$

$$\nabla\Lambda_{ik}^v+\Lambda_{ik}^v\omega_o^o+\Lambda_{ik}^n\omega_n^v=\Lambda_{ikj}^v\omega_o^j,\;\; \Lambda_{i[kj]}^v=0\,, \tag{5}$$

$$\nabla N_{vj}^i+N_{vj}^i\omega_o^o-\delta_j^i\omega_v^o=N_{vjk}^i\omega_o^k,\;\; N_{v[jk]}^i=0\,. \tag{6}$$

В силу регулярности ($\Lambda\overset{def}{=}\left|\Lambda_{ij}^n\right|\neq 0$) гиперполосы тензор первого порядка Λ_{ij}^n является невырожденным, значит, существует соответствующий ему обращенный тензор Λ_n^{ik} :

$$\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kj}^n=\delta_j^i,\;\; \nabla\Lambda_n^{ij}-\Lambda_n^{ij}\omega_o^o=-\Lambda_n^{is}\Lambda_n^{tj}\Lambda_{stk}^n\omega_o^k\,. \tag{7}$$

Функция Λ есть относительный инвариант первого порядка:

$$d\ln\Lambda=2\omega_i^i-m(\omega_o^o+\omega_n^n)+\Lambda_k\omega_o^k,\;\; \Lambda_k=\Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijk}^n\,.$$

Продолжая последнее уравнение, имеем

$$\nabla\Lambda_i+\Lambda_i\omega_o^o+(m+2)(\omega_i^o-\Lambda_{ij}^n\omega_n^j)=\Lambda_{ij}\omega_o^j,\, \Lambda_{[ij]}=2\Lambda_{k[i}^vN_{|v|j]}^k\,. \tag{8}$$

В окрестности второго порядка строим квазитензоры a_n^v и a_v^o :

$$a_n^v=\frac{1}{m}\Lambda_{ij}^v\Lambda_n^{ji},\;\; a_v^o=\frac{1}{m}N_{vi}^i\,, \tag{9}$$

уравнения которых в силу соотношений (5)–(7) имеют вид:

$$\nabla a_n^v + \omega_n^v = a_{nk}^v \omega_o^k, \quad \nabla a_v^o - \omega_v^o = a_{vk}^o \omega_o^k \,. \tag{10}$$

Известно [7], что регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ в третьей дифференциальной окрестности индуцирует поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик:

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j + \frac{2\Lambda_i}{m+2} x^i x^n + B_{uv}^n x^u x^v + 2b_u x^u x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n \,. \tag{11}$$

Согласно работе [14] под двойственной нормализацией регулярной гиперполосы понимается такая ее нормализация в смысле А. П. Нордена [4], при которой в каждой точке A_o нормаль первого рода N_{n-m} содержит характеристику Π_{n-m-1} главной касательной гиперплоскости Π_{n-1}.

Пусть гиперполоса $H_m \subset P_n$ нормализована в смысле Нордена – Чакмазяна полями нормалей первого $N_{n-m}(\nu)$ и второго $N_{m-1}(\nu)$ родов, определяемых полями квазитензоров ν_n^i и ν_i^o соответственно:

$$\nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nk}^i \omega_o^k, \quad \nabla \nu_i^o + \omega_i^o = \nu_{ik}^o \omega_o^k \,. \tag{12}$$

Нормализация гиперполосы $H_m \subset P_n$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (11) будет взаимной [4] при выполнении условий

$$\nu_i^o = \frac{\Lambda_i}{m+2} + \Lambda_{ij}^n \nu_n^j \,. \tag{13}$$

Заметим, что определяемые [10] в третьей дифференциальной окрестности поля нормалей Фубини Φ_n^i, Φ_i^o

$$\Phi_n^i = \frac{1}{2}\Lambda_n^{ij}\left(B_j - \frac{\Lambda_j}{m+2}\right), \quad \Phi_j^o = \frac{1}{2}\left(B_j + \frac{\Lambda_j}{m+2}\right) \tag{14}$$

и Вильчинского $(-W_n^i), W_i^o$

$$W_n^i = B^{ik} W_{nk} \,, \quad W_i^o = \Lambda_{ik}^n (-W_n^k) + \frac{\Lambda_i}{m+2} \tag{15}$$

нормализуют гиперполосу $H_m \subset P_n$ взаимно.

Система функций $\{T_n^i\}$

$$T_n^i \overset{def}{=} W_n^i + F_n^i, \quad dT_n^i - T_n^i \omega_n^n + T_n^j \omega_j^i = T_{nj}^i \omega_o^j \tag{16}$$

образует тензор третьего порядка.

Оснащение в смысле Картана [16] гиперполосы $H_m \subset P_n$ полем плоскостей $N_{n-m-1}(\nu) \subset N_{n-m}(\nu)$, не имеющих общих точек с касательной плоскостью к базисной поверхности V_m, определяется полями геометрических объектов $\{\nu_n^i\}$, $\{\nu_n^i, a_n^v, \nu_n^o\}$, $\{\nu_v^o\}$ [8]:

$$\nabla \nu_n^o + \nu_n^j \omega_j^o + a_n^u \omega_u^o + \omega_n^o = \nu_{nk}^o \omega_o^k, \ \nabla \nu_v^o + \omega_v^o = \nu_{vk}^o \omega_o^k. \qquad (17)$$

Известно [7], что геометрия регулярной гиперполосы $Hm \subset Pn$ получается из той части геометрии голономного гиперполосного распределения $H \subset Pn$ [9], которая определяется полями фундаментальных подобъектов. Рассматривая результаты работ [13] и [6] на регулярной гиперполосе $Hm \subset Pn$, получим следующие утверждения:

Теорема 1. Если в качестве тензора Γ_{ni}^n

$$d\Gamma_{ni}^n + \Gamma_{ni}^n \omega_o^o - \Gamma_{nj}^n \omega_i^j = \Gamma_{nij}^n \omega_o^j \qquad (18)$$

принимать охваты

$$\overset{o}{\Gamma}{}_{ni}^n = 0, \ \overset{1}{\Gamma}{}_{ni}^n = \frac{\Lambda_i}{m+2} - \nu_i^o + \Lambda_{ij}^n \nu_n^j, \ \overset{2}{\Gamma}{}_{ni}^n = B_i - \nu_i^o - \Lambda_{ij}^n \nu_n^j, \ \overset{3}{\Gamma}{}_{ni}^n = \Lambda_{ij}^n T_n^j, \qquad (19)$$

то на оснащенной в смысле Нордена – Картана регулярной гиперполосе $Hm \subset Pn$ определяются задаваемые внешними дифференциальными формами $\{\overset{\bar p}{\Theta}{}_{\alpha}^{\bar\beta}\}$ нормальные связности $\overset{\bar p}{\nabla}{}^{\perp}$:

$$\begin{gathered}\overset{\bar p}{\Theta}{}_n^o = \omega_n^o + \nu_n^i \omega_i^o + a_n^v \omega_v^o - \nu_j^o (\nu_{nk}^j \omega_o^k + a_n^v \omega_v^j - \nu_n^j \nu_n^i \omega_i^n) + \nu_n^o \overset{\bar p}{\Gamma}{}_{nj}^n \omega_o^j, \\ \overset{\bar p}{\Theta}{}_v^o = \omega_v^o - \nu_j^o \omega_v^j, \ \overset{\bar p}{\Theta}{}_n^u = a_{nk}^u \omega_o^k + \nu_n^i \omega_i^u - a_n^u \nu_n^i \omega_i^n, \ \overset{\bar p}{\Theta}{}_v^n = 0, \\ \overset{\bar p}{\Theta}{}_n^n = \omega_n^n - \omega_o^o + \nu_i^o \omega_o^i + \nu_n^i \omega_i^n + \overset{\bar p}{\Gamma}{}_{nj}^n \omega_o^j, \ \overset{\bar p}{\Theta}{}_v^u = \omega_v^u - \delta_v^u (\omega_o^o - \nu_i^o \omega_o^i).\end{gathered} \qquad (20)$$

Каждая из этих четырех систем слоевых форм $\{\overset{\bar p}{\Theta}{}_{\alpha}^{\bar\beta}\}$ соответствует структурным уравнениям Картана – Лаптева [3]:

$$D\overset{\bar p}{\Theta}{}_{\alpha}^{\bar\beta} = \overset{\bar p}{\Theta}{}_{\alpha}^{\gamma} \wedge \overset{\bar p}{\Theta}{}_{\gamma}^{\bar\beta} + \frac{1}{2} \overset{\bar p}{R}{}_{\alpha st}^{\bar\beta} \omega_o^s \wedge \omega_o^t. \qquad (21)$$

Отметим, что из равенств (20) следует, что для определения связности $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ не требуется задания оснащения в смысле Картана, так как $\overset{o}{\Gamma}{}_{ni}^n = 0$.

Следствие. На гиперполосе, нормализованной полями нормалей Фубини $Ц_n^i, \ Ц_i^o$ или полями нормалей Вильчинского $(-W_n^i), \ W_i^o$, связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают.

Теорема 3. На оснащенной в смысле Нордена-Картана регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают в том и только в том случае, когда гиперполоса $H_m \subset P_n$нормализована полями нормалей Фубини $Ц_n^i$, $Ц_i^o$.

В уравнениях структуры (21) система функций $\{R^{\overline{\alpha}}_{\beta st}\}$ образует для нормальной связности $\nabla^{\perp}$ тензор кривизны-кручения:

$$dR^{\overline{\alpha}}_{\beta st} + 2R^{\overline{\alpha}}_{\beta st}\omega^o_o - R^{\overline{\alpha}}_{\beta kt}\omega^k_s - R^{\overline{\alpha}}_{\beta sk}\omega^k_t - R^{\overline{\alpha}}_{\gamma st}\Theta^{\gamma}_{\beta} + R^{\gamma}_{\beta st}\Theta^{\overline{\alpha}}_{\gamma} = R^{\overline{\alpha}}_{\beta stk}\omega^k_o. \quad (22)$$

Подсистема функций $\{R^{\alpha}_{\beta st}\}$ сама образует тензор, подтензор тензора кривизны-кручения нормальной связности $\nabla^{\perp}$.

При обращении в нуль подтензора $\{R^{\alpha}_{\beta st}\}$ нормальную связность $\nabla^{\perp}$ называют полуплоской; нормальную связность $\nabla^{\perp}$ называют плоской, если ее тензор кривизны-кручения обращается в нуль [15].

Известно [7], что две нормали первого (второго) рода в каждой точке гиперполосы $H_m \subset P_n$ определяют пучок нормалей первого (второго) рода. В третьей дифференциальной окрестности гиперполосы $H_m \subset P_n$ их можно задать квазитензорами:

$$\nu^i_n(\tau_1) = \tau_1 T^i_n - W^i_n, \ \nu^o_i(\tau_2) = \tau_2(F^o_i - W^o_i) + W^o_i \equiv \tau_2 \Lambda^n_{ik} T^k_n + W^o_i, \quad (23)$$

где τ_1, τ_2 – инвариантные параметры.

По аналогии с поверхностью $V_2 \subset P_3$ [17], гиперполосу $H_m \subset P_n$ назовем коинцидентной, если пучки нормалей (23) вырождаются в одну нормаль в каждой точке $A_o \in H_m$. Таким образом, условием коинцидентности гиперполосы служит обращение в нуль тензора T^i_n.

Из строения слоевых форм (20) следует, что условием совпадения нормальных связностей $\overset{3}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ является обращение в нуль тензора $\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}$:

$$\overset{3}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{o}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \{\overset{3}{\theta}{}^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}} \equiv \overset{o}{\theta}{}^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}\} \Leftrightarrow T^j_n \Lambda^n_{ij} = 0.$$

Так как тензор Λ^n_{ij} невырожденный, последнее равенство равносильно обращению в нуль тензора T^i_n. Значит, доказана

Теорема 4. Нормальные связности $\overset{3}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают тогда и только тогда, когда гиперполоса $H_m \subset P_n$ является коинцидентной.

Учитывая утверждение теоремы 3, имеем

Следствие. Регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ коинцидентна тогда и только тогда, когда все четыре индуцируемые при ее оснащении нормальные связности вырождаются в одну.

Определение. Пара, составленная из конгруэнции (n-m)-мерных плоскостей N_{n-m} с (n-m-1)-мерной осью Π_{n-m-1} в каждой текущей точке и псевдоконгруэнции (m-1)-мерных плоскостей N_{m-1} в P_n, называется [12] односторонне расслояемой от конгруэнции к псевдоконгруэнции, если между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие и существует (n-m)-параметрическое семейство гиперповерхностей V^m_{n-1} ранга m с (n-m-1)-мерными плоскими образующими N_{n-m-1} [5], [1], касательные гиперплоскости которых проходят через соответствующие плоскости N_{m-1} псевдоконгруэнции.

Допустим, что плоской образующей расслаивающей гиперповерхности V^m_{n-1} является произвольная, оснащающая в смысле Картана плоскость N_{n-m-1}. Тогда, раскладывая дифференциалы точек M_n и M_v и приравнивая коэффициенты при A_o к нулю, получим, что условием односторонней расслояемости является полная интегрируемость системы уравнений

$$\Omega^o_n \equiv d\nu^o_n + \overset{o}{\Theta}{}^o_n - \nu^o_n \overset{o}{\Theta}{}^n_n - \nu^o_u \overset{o}{\Theta}{}^u_n = 0,\ \ \Omega^o_v \equiv d\nu^o_v + \overset{o}{\Theta}{}^o_v - \nu^o_u \overset{o}{\Theta}{}^u_v = 0, \tag{24}$$

в которых $\overset{o}{\nu}_n, \overset{o}{\nu}_v$ – любые функции, удовлетворяющие уравнениям (17).

Замыкая последние уравнения, с помощью структурных уравнений (21) получаем, что условием расслояемости пары нормалей первого и второго рода является выполнение равенств

$$\overset{o}{R}{}^o_{\alpha st} = \nu^o_n \overset{o}{R}{}^n_{\alpha st} + \nu^o_w \overset{o}{R}{}^w_{\alpha st}. \tag{25}$$

Так как выбор функций $\overset{o}{\nu}_n, \overset{o}{\nu}_v$ произволен, соотношения (25) выполнимы лишь в случае обращения в нуль тензора кривизны-кручения связности $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$. Следовательно, имеет место

Теорема 5. Нормальная связность $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая на нормализованной гиперполосе $H_m \subset P_n$, является плоской тогда и только тогда, когда конгруэнция нормалей первого рода и псевдоконгруэнция нормалей второго рода составляют пару, односторонне расслояемую от нормали первого рода к нормали второго рода.

Если для поля оснащающих плоскостей оснащенной в смысле Картана нормализованной гиперполосы $H_m \subset P_n$ выполняется условие (24), то, с учетом соотношений (20), получим

$$\Omega^o_n \equiv d\nu^o_n + \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^o_n - \nu^o_n \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^n_n - \nu^o_u \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^u_n = 0,\ \ \Omega^o_v \equiv d\nu^o_v + \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^o_v - \nu^o_u \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^u_v = 0. \tag{26}$$

Замыкая последние уравнения, с использованием (21) имеем

$$\overset{\bar{p}}{R}{}^o_{\alpha st} = \nu^o_n \overset{\bar{p}}{R}{}^n_{\alpha st} + \nu^o_w \overset{\bar{p}}{R}{}^w_{\alpha st}. \tag{27}$$

Следовательно, имеет место

Теорема 6. Если касательная гиперплоскость гиперповерхности V^m_{n-1}, плоскими образующими которой являются оснащающие плоскости Картана N_{n-m-1}, проходит через нормаль второго рода, то индуцируемая в нормальных расслоениях на оснащенной в смысле Нордена – Картана гиперполосе $H_m \subset P_n$ связность $\overset{\bar{p}}{\nabla}{}^{\perp}$ является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская.

Согласно монографии [7], в касательном расслоении нормализованной гиперполосы $H_m \subset P_n$ индуцируется средняя [4] аффинная связность без кручения $\overset{o}{\nabla}$, причем

$$d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{ik}\overset{o}{\theta}{}^k_j - \Lambda^n_{kj}\overset{o}{\theta}{}^k_i + \Lambda^n_{ij}\overset{o}{\Theta}{}^n_n = 0. \qquad (28)$$

Известно также [7], что на нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ индуцированная связность $\overset{o}{\nabla}$ будет римановой тогда и только тогда, когда форма $\overset{o}{\Theta}{}^n_n$ образует полный дифференциал, то есть в случае обращения в нуль кососимметричного тензора $\nu^o_{[st]} - \nu^j_{n[s}\Lambda^n_{t]j}$:

$$\nu^o_{[st]} - \nu^j_{n[s}\Lambda^n_{t]j} = 0. \qquad (29)$$

Согласно соотношениям (20) условием совпадения нормальных связностей $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ является равенство нулю тензора $\overset{2}{\Gamma}{}^n_{ni}$:

$$\overset{2}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{o}{\nabla}{}^{\perp} \Leftrightarrow \{\overset{2}{\Theta}{}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} \equiv \overset{o}{\Theta}{}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\} \Leftrightarrow B_i - \nu^o_i - \nu^j_n\Lambda^n_{ij} = 0\,. \qquad (30)$$

Последние соотношения в силу (25) равносильны уравнению

$$\Theta \equiv d\ln c_n + \omega^o_o - \omega^n_n = (\nu^o_i + \nu^j_n\Lambda^n_{ij})\omega^i_o. \qquad (31)$$

Так как алгебраическое следствие уравнения (31) в силу (2), (4), (12)

$$D\Theta = 2(\nu^o_{[ik]} - \nu^j_{n[i}\Lambda^n_{k]j})\omega^i_o \wedge \omega^k_o, \qquad (32)$$

то из соотношений (29), (32) следует, что условием полной интегрируемости уравнения (31) является римановость средней связности $\overset{o}{\nabla}$. Следовательно, доказана

Теорема 7. Индуцируемые на оснащенной в смысле Нордена – Картана гиперполосе $H_m \subset P_n$ нормальные связности $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают в том и только в том случае, когда средняя связность $\overset{o}{\nabla}$ риманова.

Резюме. В исследовании положено начало изучению нормальных связностей на гиперполосах (как голономных, так и неголономных) в n-мерном проективном пространстве. Полученные результаты позволяют сделать вывод о значительной продуктивности использованного метода изучения линейных связностей, индуцируемых на гиперполосах, особенно при подключении двойственной теории погруженных многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акивис, М. А.* Многомерные поверхности специальных проективных типов / М. А. Акивис, В. В. Рыжков // Труды 4 Всес. матем. съезда. – Л. : Наука, 1964. – Т. 2. – С. 159–164.

2. *Вагнер, В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М. : МГУ, 1950. – Вып. 8. – С. 197–272.

3. *Лаптев, Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Труды Московского математического общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

4. *Норден, А. П.* Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М. : Наука, 1976. – 432 с.

5. *Савельев, С. И.* Поверхности с плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна / С. И. Савельев // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 115. – № 4. – С. 663–665.

6. *Смирнова, Е. Н.* Двойственная нормализация полярных неголономных гиперполос в проективно-метрическом пространстве / Е. Н. Смирнова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2011. – № 2 (70). Ч. 1. – С. 140–144.

7. *Столяров, А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий / А. В. Столяров. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ин-т, 1994. – 290 с.

8. *Столяров, А. В.* Об оснащениях в смысле Э. Картана и Э. Бортолотти регулярной гиперполосы / А. В. Столяров // Дифференциальная геометрия многообразия фигур. Вып. 22. – Калининград : Калининградский ун-т, 1991.– С. 104–108.

9. *Столяров, А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов / А. В. Столяров // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. – 1975. – Т. 7. – С. 117–151.

10. *Столяров, А. В.* Условие квадратичности регулярной гиперполосы / А. В. Столяров // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 11. – С. 106–108.

11. *Фиников, С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

12. *Фиников, С. П.* Теория пар конгруэнций / С. П. Фиников. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 444 с.

13. *Фисунов, П. А.* Центропроективные связности в расслоениях нормалей первого рода на неголономной гиперполосе / П. А. Фисунов ; Чуваш. гос. пед. ин-т. – Чебоксары, 1998. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ РАН, № 627-В98.

14. *Чакмазян, А. В.* Двойственная нормализация / А. В. Чакмазян // Докл. АН АрмССР. – Ереван : Армянск. гос. пед. ин-т, 1959. – Т. 28. – № 4. – С. 151–157.

15. *Чакмазян, А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий / А. В. Чакмазян. – Ереван : Армянск. гос. пед. ин-т, 1990. – 116 с.

16. *Cartan, E.* Le sespaces a connexion projective / E. Cartan // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М. : МГУ, 1937. – Вып. 4. – С. 147–159.

17. *Michăilescu, T.* Geometrie differentialâ projectivâ / T. Michăilescu // Bucureşti Acad. RPR. – Bucureşt, 1958. – 394 p.