УДК 330.101 (030)

О ВЕРОЯТНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

ON THE PROBABILISTIC AND DYNAMIC MODEL OF MAKING OPTIMAL SOLUTIONS

В. А. Славин

V. A. Slavin

Филиал ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный экономический университет» в г. Чебоксары

Аннотация. Предложен метод расчета оптимальных распределений векторов решений, определяющих экономические свойства производственных систем. В основу метода положен принцип измерения вероятностно-динамической теории, сводящий данную проблему к задаче на собственные функции и собственные значения оператора управленческих решений. Введена вероятностно-динамическая модель нейронных сетей, распространения возмущений, иллюстрирующая основные этапы решения поставленной задачи оптимизации.

Abstract. The article presents the method for calculating the optimal vectors of solutions which determine the economic properties of production systems. This method is based on the principle of measuring probabilistic and dynamic theory which comes to the problem of optimizing the eigenfunctions and eigenvalues of the operator of making administrative solutions. The article also introduces the probabilistic and dynamic model of neural networks, of distribution of disturbances. This model illustrates the basic steps of solving the problem of optimization.

Ключевые слова: *производственно-экономическая система, вероятностно-динамический метод, функция состояния и оператор Гамильтона системы, кванты предпринимательской способности, векторный оператор решения, принцип измерения, модель нейронных сетей.*

Keywords: *industrial and economic system, probabilistic and dynamic method, state function and Hamiltonian system, quanta of entrepreneurial ability, vector operator for solutions, principle of measuring, model of neural networks.*

Актуальность исследуемой проблемы заключается в возможности описания оптимальных свойств производственно-экономических систем на основе анализа числовых характеристик (математических ожиданий, дисперсий, корреляционных моментов и др.) фазовых переменных этих систем, образующих вектор управленческих решений.

Материал и методика исследований. Предлагаемый метод основан на принципе измерения вероятностно-динамической теории, сводящем данную проблему к задаче на собственные функции и собственные значения оператора управленческих решений. При условии коммутации этого оператора с оператором Гамильтона производственных систем исследование задачи приводит к спектру оптимальных решений по критерию, обобщающему известный принцип оптимальности Беллмана.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. В работах [8], [9] описаны вероятностно-динамические свойства производственных состояний фирмы, находящейся в условиях рентабельной реализации товара. Введены обобщенные фазовые переменные

$$\vec{X} = (X_\mu) = \left(\sum_l \gamma_{\mu l} x_l\right) \text{ и } \vec{B} = (B_\mu) = \left(\sum_l \gamma_{\mu l} b_l\right), \tag{1}$$

отвечающие квазинезависимым степеням свободы – участкам цехов производственной системы, где $\vec{x} = (x_l)$, $\vec{b} = (b_l)$ – векторы исходных ресурсов предприятия; $\gamma_{\mu l}$ – элементы матрицы взаимодействия ресурсов в ходе технологических процессов на участках цехов $\mu = (i,k)$.

Фазовые переменные (1) образуют случайный вектор полного решения $\vec{S} = (\vec{B}, \vec{X})$, компоненты которого распределены в фазовом пространстве по законам, определяемым представлениями $\langle \vec{B} | \Psi, t \rangle$, $\langle \vec{X} | \Psi, t \rangle$ функции производственного состояния $|\Psi, t\rangle$, мультипликативной по индексу μ участков цехов

$$|\Psi, t\rangle = \prod_\mu |\Psi_\mu, t\rangle \tag{2}$$

и удовлетворяющей основному уравнению рыночной теории – уравнению Шредингера-Беллмана:

$$i\lambda \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t\rangle = \hat{P}(t) |\Psi, t\rangle . \tag{3}$$

Здесь $\hat{P}(t) = \sum_\mu \hat{P}_\mu(t)$ – оператор Гамильтона, характеризующий способность субъекта к выбору решений, формирующих оптимальные производственные состояния при заданных технологических условиях. Уравнение (3) выражает критерий оптимальности, обобщающий известный принцип оптимальности Беллмана [4] на случай полностью описанных состояний $|\Psi, t\rangle$.

Не зависящий от времени оператор Гамильтона $\hat{P} = \sum_\mu \hat{P}_\mu$ называется оператором предпринимательской способности субъекта. Его собственные функции $|\vec{n}\rangle = \prod_\mu |n_\mu\rangle$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\hat{P}_\mu |n_\mu\rangle = P_{n_\mu} |n_\mu\rangle$, а собственные значения P_{n_μ}, образующие дискретный спектр ($n_\mu = 0,1,2,\ldots$), называются квантами способности [3]. Кванты предпринимательской способности выступают в роли «катализатора» процесса выбора оптимальных решений и распределены в фазовом пространстве по закону, определяемому основным уравнением (3).

В работе [8] получены нормальные законы распределения фазовых переменных и исследованы их числовые характеристики. Показано, что центры (средние значения) этих распределений описывают движение вектора решений вдоль фазовой траектории, определяя тем самым плановое (оптимальное) состояние производственной системы [2], [6], [7].

Вторые моменты многомерных распределений описывают разброс (эллипсы неопределенностей) компонент решения относительно фазовых траекторий. С течением времени эллипс вращается с частотой технологического цикла, одновременно деформируясь вдоль своих главных осей; в этом случае кванты предпринимательской способности, перераспределяясь в фазовом пространстве, выстраиваются вдоль «средней линии» эллипса – прямой регрессии, обуславливая появление корреляционной связи между компонентами вектора решения [8]. В то же время кванты способности, находящиеся в области пересечения эллипсов неопределенностей различных состояний, «катализируют» переходы между этими состояниями, приводя к возникновению рисков потерь капитальных средств предприятия [9].

2. Описанные выше результаты подтверждают вывод (сделанный в [3]) о том, что исследование оптимальных свойств производственных состояний в рамках вероятностно-динамического метода может быть основано на анализе числовых характеристик вероятностных распределений векторов решений (1), формирующих эти состояния. Аналитический подход к такому исследованию, предпринятый в [2], [6], [7], [8], [9], заключается в решении уравнения Шредингера-Беллмана и требует знания оператора Гамильтона $\widehat{P}(t)$, несущего информацию о технологических взаимодействиях в системе.

В случае достаточно сложных гамильтонианов аналитический подход становится трудоемким, поэтому необходимо использовать численные методы, направленные на моделирование процесса принятия решений.

Настоящая работа посвящена построению вероятностно-динамической модели принятия оптимальных решений (модели нейронных сетей), позволяющей найти (при заданном гамильтониане производственной системы) закон распределения компонент вектора решений (1) и его числовые характеристики с последующим описанием экономических свойств системы.

Постановка задачи моделирования базируется на одном из главных принципов вероятностно-динамического метода – принципе измерения [3], [5] и заключается в следующем.

Назовем процессом измерения величины f (процессом f-измерения) взаимодействие экономической системы с «измерительным прибором», описываемым оператором измеряемой величины $\widehat{f}$ и переводящим функцию исходного состояния $\left|\Psi,t\right\rangle$ в исследуемое состояние (отклик системы) $\widehat{f}\left|\Psi,t\right\rangle$, специально подготовленное «прибором» для решения задачи измерения – получения спектра возможных значений величины f и закона ее распределения. Заметим, что процедуре принятия решения отвечает частный случай измерительного процесса, для которого величина f представлена обобщенными фазовыми переменными (1).

В ходе измерения в системе генерируются специальные каналы формирования отклика $\widehat{f}\left|\Psi,t\right\rangle$, отвечающие определенному механизму его проявления. С математической точки зрения каждому такому каналу соответствует некоторое g – представление функции состояния $\left\langle g\middle|\Psi,t\right\rangle$, определенное в пространстве собственных функций самосопряженного оператора $\widehat{g}$. Если оператор измеряемой величины $\widehat{f}$ связан функционально с генератором представления $\widehat{g}$, то говорят об одноканальном отклике, в противном случае отклик будет многоканальным.

Опишем кратко процессы, происходящие в предлагаемой модели. На первом этапе формируются возмущения «входных нейронов». Эти возмущения описываются искомой функцией состояния $\left|\Psi,t\right\rangle$, заданной в представлении оператора предпринимательской способности $\widehat{g} = \widehat{P}$ (в квантовом представлении). Под действием оператора принимаемого решения $\widehat{f} = \widehat{C}$ возмущения «входных нейронов» переносятся по специальным синоптическим каналам (с заданной матрицей переходов) к «выходным нейронам», где формируются квантовые представительства функции отклика $\widehat{C}\left|\Psi,t\right\rangle$.

В течение второго этапа в «выходных нейронах» происходит оптимизирующий процесс принятия решения, заключающийся в нахождении собственных значений и собственных векторов матрицы переходов возбуждений в многоканальном отклике. При этом оптимальные свойства получаемых решений обусловлены выбором оператора $\widehat{C}$, коммутирующего с оператором Гамильтона системы.

В результате с модели «снимаются» спектр возможных значений вектора решения и функция исходного состояния $\left|\Psi,t\right\rangle$ в квантовом представлении. Дальнейшие процессы заключаются в преобразовании квантовых представительств $\left|\Psi,t\right\rangle$ в «траекторные» с описанием законов распределения компонент решения и их числовых характеристик.

КВАНТОВЫЙ И ТРАЕКТОРНЫЙ МЕХАНИЗМЫ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3. Пусть производственная система находится в состоянии, описываемом функцией $\left|\Psi,t\right\rangle$ в представлениях компонент $\vec{X}$ и $\vec{B}$ вектора полного решения (1). Такие представления называются «траекторными». Предположим, что функция $\left|\Psi,t\right\rangle$ удовлетворяет уравнению Шредингера-Беллмана (3) с гамильтонианом $\widehat{P}(t)$ достаточно сложного вида, не допускающим точного решения. Поставим задачу о численном расчете этой функции с последующим нахождением распределений вероятностей $\left|\left\langle\vec{X}\middle|\Psi,t\right\rangle\right|^2$ и $\left|\left\langle\vec{B}\middle|\Psi,t\right\rangle\right|^2$ компонент решения и их числовых характеристик.

В дальнейшем для определенности будем говорить об отклике отдельных участков цехов μ системы, состояние которых описывается X_μ – представлением функции $\left|\Psi_\mu,t\right\rangle$.

Совершим преобразование функции $\left\langle X_\mu\middle|\Psi_\mu,t\right\rangle$ к квантовому представлению, разложив ее по полному набору собственных функций $\left\langle X_\mu\middle|n_\mu^{(l)}\right\rangle$ оператора предпринимательской способности $\widehat{P}_\mu$:

$$\left\langle X_\mu\middle|\Psi_\mu,t\right\rangle = \sum_{n_\mu^{(l)}}\left\langle X_\mu\middle|n_\mu^{(l)}\right\rangle\left\langle n_\mu^{(l)}\middle|\Psi_\mu,t\right\rangle. \quad (4)$$

Квадрат модуля $\left|\left\langle n_\mu^{(l)}\middle|\Psi_\mu,t\right\rangle\right|^2$ определяет вероятность того, что состояние $\left|\Psi_\mu,t\right\rangle$ сформировано благодаря активизации $n_\mu^{(l)}$ квантов предпринимательской способности субъекта. Предполагается, что оператор способности $\widehat{P}_\mu$, спектр его собственных значений $n_\mu^{(l)}$ и вид собственных функций $\left\langle X_\mu\middle|n_\mu^{(l)}\right\rangle$ известны (см. [5], [8]).

Введем в рассмотрение однослойную прямонаправленную модель нейронных сетей [1] (рис. 1) и подадим на каждый «входной нейрон» этой модели сигнал, моделирующий неизвестную амплитуду $\left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t \right\rangle$.

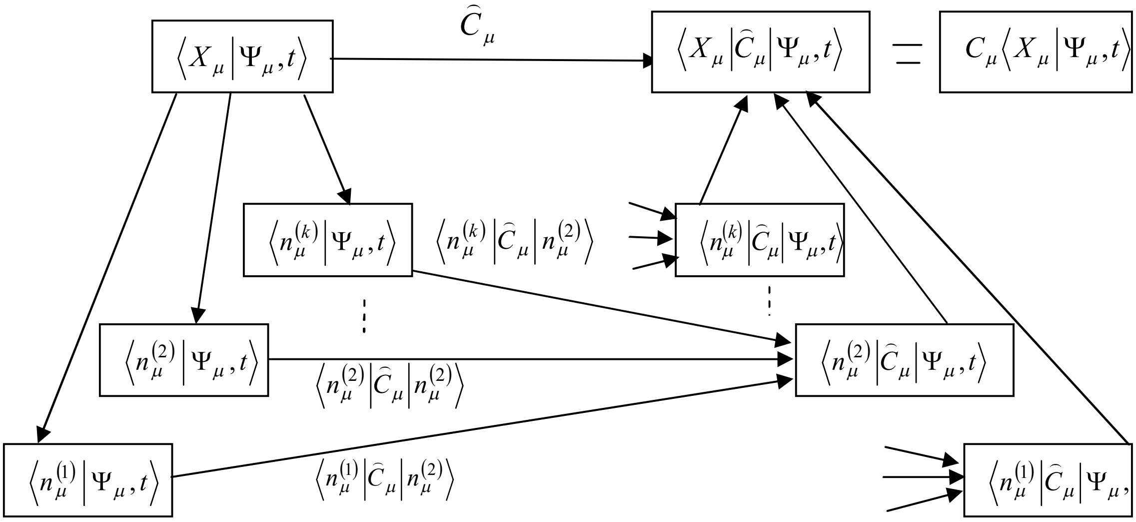

Рис. 1. ***Схема нейронной модели процесса принятия оптимального решения***

С помощью оператора решения $\hat{C}_\mu$ функции $\left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t \right\rangle$ преобразуются в «специально подготовленные» для оптимального менеджмента функции отклика $\hat{C}_\mu \left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \Psi_\mu, t \right\rangle$. На оператор $\hat{C}_\mu$ наложим единственное условие – коммутирование с оператором уравнения Шредингера-Беллмана $\hat{G}_\mu = i\lambda \frac{\partial}{\partial t} - \hat{P}_\mu(t)$:

$$\left[\hat{G}_\mu, \hat{C}_\mu(t)\right] = 0, \tag{5}$$

свидетельствующее о том, что функция (4), удовлетворяющая уравнению (3), является собственной для оператора решения $\hat{C}_\mu$:

$$\hat{C}_\mu(t)\left\langle X_\mu \middle| \Psi_\mu, t \right\rangle = C_\mu(t)\left\langle X_\mu \middle| \Psi_\mu, t \right\rangle. \tag{6}$$

Уравнение (6) описывает «траекторный» механизм процесса принятия решения, соответствующий режиму одноканального отклика системы. Отметим оптимальный характер такого отклика, вытекающий из того факта, что решения C_μ формируют состояние $\left\langle X_\mu \middle| \Psi_\mu, t \right\rangle$, удовлетворяющее критерию оптимальности (3).

Приведем в качестве примера выражение для оператора решений $\widehat{C}_\mu = \left(\frac{\omega_\mu}{2\lambda\beta_\mu}\right)^{1/2}$ $\left(\widehat{X}_\mu + i\frac{\beta_\mu}{\omega_\mu}\widehat{B}_\mu\right)$, коммутирующего с оператором уравнения Шредингера-Беллмана $\widehat{G}_\mu =$ $i\lambda\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_\mu}{2}\widehat{B}_\mu^2 - \frac{\omega_\mu^2 \widehat{X}_\mu^2}{2\beta_\mu}\left(1+\varepsilon_\mu \cos 2\omega_\mu t\right)$ фирмы, находящейся в режиме рентабельной реализации товара и изученной в цитируемых выше работах [8], [9]. Здесь $\widehat{X}_\mu = X_\mu$; $\widehat{B}_\mu = -i\lambda\frac{\partial}{\partial X_\mu}$ – операторы фазовых переменных; ω_μ и β_μ – частота технологического цикла и параметр качества продукции участка цеха μ; ε_μ – интенсивность предложения товара. Отметим, что нахождение вида оператора $\widehat{C}_\mu$ для произвольных гамильтонианов представляет собой самостоятельную задачу, далеко выходящую за рамки настоящей работы.

Под действием возмущения $\widehat{C}_\mu$ сигналы $\left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$, локализованные во «входных нейронах», переходят по специальным синоптическим каналам к «выходным нейронам» с образованием многоканального отклика $\widehat{C}_\mu\left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$:

$$\widehat{C}_\mu\left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle = \sum_{n_\mu^{(l)}} \left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \widehat{C}_\mu \middle| n_\mu^{(l)}\right\rangle \left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle. \tag{7}$$

Здесь $\left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \widehat{C}_\mu \middle| n_\mu^{(l)}\right\rangle$ – элементы матрицы амплитуд переходов, определяющие модуляцию сигналов $\left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$ при их распространении по каналам $n_\mu^{(l)} \to n_\mu^{(k)}$ (см. рис. 1).

4. Перейдем в выражении (7) от квантового представления к «траекторному» и учтем уравнение (6):

$$\left\langle X_\mu \middle| \widehat{C}_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle = \sum_{n_\mu^{(k)}, n_\mu^{(l)}} \left\langle X_\mu \middle| n_\mu^{(k)}\right\rangle \left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \widehat{C}_\mu \middle| n_\mu^{(l)}\right\rangle \left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle = C_\mu \sum_{n_\mu^{(k)}} \left\langle X_\mu \middle| n_\mu^{(k)}\right\rangle \left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle. \tag{8}$$

В результате получим систему уравнений

$$\sum_{n_\mu^{(l)}} \left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \widehat{C}_\mu \middle| n_\mu^{(l)}\right\rangle \left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle = C_\mu \left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle, \tag{9}$$

определяющую спектр оптимальных решений C_μ и квантовые представления функции состояния $\left\langle n_\mu^{(l)} \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$ как собственные значения и собственные векторы матрицы переходов $\left\langle n_\mu^{(k)} \middle| \widehat{C}_\mu \middle| n_\mu^{(l)}\right\rangle$.

Теперь мы можем найти функцию состояния $\left\langle X_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$ (воспользовавшись разложением (4)) и закон распределения $\left|\left\langle X_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle\right|^2$ X_μ – координаты вектора решения, возможные значения которой вытекают из спектра величины C_μ. Аналогичным образом может быть рассчитан и закон распределения $\left|\left\langle B_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle\right|^2$ координаты B_μ полного решения, возможные значения которой также получаются из спектра величины C_μ.

Числовые характеристики найденных законов распределения (математические ожидания M_{X_μ}, M_{B_μ}, дисперсии D_{X_μ}, D_{B_μ}, коэффициент корреляции $r_{X_\mu B_\mu} = r$) определяются стандартными формулами:

$M_{X_\mu} = \left\langle \Psi_\mu, t \middle| \widehat{X}_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$; $M_{B_\mu} = \left\langle \Psi_\mu, t \middle| \widehat{B}_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$; $D_{X_\mu} = \left\langle \Psi_\mu, t \middle| \widehat{X}_\mu^2 \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle - M_{X_\mu}^2$;

$D_{B_\mu} = \left\langle \Psi_\mu, t \middle| \widehat{B}_\mu^2 \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle - M_{B_\mu}^2$; $r = \left\{ 1/2 \left\langle \Psi_\mu, t \middle| \left(\widehat{X}_\mu \widehat{B}_\mu + \widehat{B}_\mu \widehat{X}_\mu\right) \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle - M_{X_\mu} M_{B_\mu} \right\} \Big/ \sqrt{D_{X_\mu} D_{B_\mu}}$.

Полученные выше результаты относились к отдельным участкам цехов μ производственной системы. Для нахождения многомерных распределений векторов решений (1) и их числовых характеристик, относящихся ко всей системе, достаточно воспользоваться свойством мультипликативности полных функций состояния $\left\langle \vec{B} \middle| \Psi, t\right\rangle$ и $\left\langle \vec{X} \middle| \Psi, t\right\rangle$, определенных как $\left\langle \vec{B} \middle| \Psi, t\right\rangle = \prod\limits_\mu \left\langle B_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$, $\left\langle \vec{X} \middle| \Psi, t\right\rangle = \prod\limits_\mu \left\langle X_\mu \middle| \Psi_\mu, t\right\rangle$ (см. (2)).

Резюме. Предложена модель нейронных сетей, описывающая процессы принятия оптимальных решений при управлении производственной деятельностью предприятия. Задача моделирования основана на принципе измерения вероятностно-динамической теории и сводится к решению системы уравнений на собственные значения матрицы переходов возбуждений при их распространении в многоканальных сетях между «входными и выходными нейронами» модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жианчаг, М.* Введение в искусственные нейронные сети / М. Жианчаг, Дж. Анил // Открытые системы. – 1997. – № 4. – С. 16–24.

2. *Иванов, А. Г.* Динамика производственной системы в условиях рентабельной реализации товара с учетом заданной налоговой нагрузки / А. Г. Иванов, В. А. Кукушкин, Е. В. Медведева // Автоматизация и современные технологии. – 2010. – № 8. – С. 38–44.

3. *Иванов, А. Г.* О вероятностно-динамическом методе в задачах микроэкономики / А. Г. Иванов, В. А. Кукушкин // Вестник ННГУ. – 2010. – № 1. – С. 179–189.

4. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М. : Айрис-пресс, 2002. – 576 с.

5. *Кукушкин, В. А.* Введение в математическую микроэкономику / В. А. Кукушкин. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2007. – 344 с.

6. *Кукушкин, В. А.* Динамика производственно-экономической системы в режиме стационарного производства / В. А. Кукушкин // Вестник ИНЖЭКОНа. Серия: Экономика. – 2011. – № 5 (48). – С. 209–219.

7. *Кукушкин, В. А.* Плановая динамика производственно-экономических систем в рентабельном режиме предложения товара / В. А. Кукушкин, Е. В. Медведева // Международный технико-экономический журнал. – 2011. – № 4. – С. 43–48.

8. *Славин, В. А.* Рыночная динамика производственно-экономических систем. I. Корреляционные свойства нестационарных производственных состояний / В. А. Славин // Вестник ИНЖЭКОНа. – 2012. – № 2. – С. 13–20.

9. *Славин, В. А.* Рыночная динамика производственно-экономических систем. II. Переходы между производственными состояниями. Элементы теории рисков / В. А. Славин, И. Н. Урусова // Актуальные проблемы экономики и права. – 2012. – № 4. – С. 187–194.