УДК 517.957

О ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВОЗМУЩЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

ON THE BOUNDS OF APPROXIMATE SOLUTION AREA OF ONE DIFFERENTIAL EQUATION IN THE NEIGHBORHOOD OF APPROXIMATE VALUE OF MOVING SINGULARITY

А. З. Пчелова

A. Z. Pchelova

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары

Аннотация. Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной правой частью пятой степени, в общем случае не интегрируемое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками. За счет нового подхода к оценке приближенного решения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки удается значительно расширить область представления приближенного решения. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Abstract. The article considers a first-order nonlinear ordinary differential equation with polynominal right side of the fifth degree which is in general can't be integrated in quadratures, and the solution of which is characterized by moving singularities. The author suggests a new method to estimate the approximate solution of the equation in the neighborhood of approximate value of moving singularity, which results in expanding the area of approximate solution. The obtained results are illustrated by the calculations.

Ключевые слова: *нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши, подвижная особая точка, возмущение, приближенное решение, точные границы, оценка погрешности, вещественная область.*

Keywords: *nonlinear ordinary differential equation, Cauchy problem, moving singularity, moving singularity, perturbation, approximate solution, exact bounds, error estimation, real domain.*

Актуальность исследуемой проблемы. В связи с тем, что наличие подвижных особых точек (критических полюсов) не позволяет применять к рассматриваемому уравнению известные аналитические и численные приближенные методы решения, так как они не адаптированы к этой категории особых точек, задача нахождения приближенного решения указанного выше уравнения является актуальной. В данной работе рассматривается задача построения приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в вещественной области.

Материал и методика исследований. Применяется метод построения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, представленный в работах [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [11], основанный на методах аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики и математического анализа.

Результаты исследований и их обсуждение. Согласно [10] для реализации поставленной задачи требуется решение следующих задач:

1) построение приближенного решения уравнения в области аналитичности;
2) нахождение подвижных особых точек решения уравнения с заданной точностью;
3) построение приближенного решения уравнения в окрестности подвижной особой точки.

В работах [9] и [12] решены первая и третья задачи соответственно для уравнения в нормальной форме

$$y'(x) = y^5(x) + r(x) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

к которому приводится с помощью некоторой замены переменных рассматриваемое дифференциальное уравнение

$$y'(x) = \sum_{i=0}^{5} f_i(x)\, y^i(x).$$

В работе [9] доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши (1)–(2) в области аналитичности, построены аналитические приближенные решения уравнения с точными и возмущенными значениями начальных условий, получена оценка погрешности для приближенного решения.

В работе [12] доказана теорема существования и единственности решения задачи (1)–(2) в виде

$$y(x) = (x^* - x)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/4}, \tag{3}$$

где $\rho = -1/4$, $C_0 \neq 0$; получена оценка погрешности приближенного решения

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n (x^* - x)^{(n-1)/4},\ C_0 \neq 0, \tag{4}$$

а также проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение (4), в результате чего оно принимает вид

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{x}^* - x)^{(n-1)/4},\ \tilde{C}_0 \neq 0. \tag{5}$$

Для приближенного решения (5) получена оценка погрешности. При этом выяснилось, что область существования приближенного решения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки значительно уменьшилась по сравнению с областью для ряда (3) в теореме существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки. Предлагаемая ниже теорема позволяет существенно увеличить область применения приближенного решения (5) и получить ее точные границы.

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая теорема из работы [12].

Теорема 1. *Пусть функция* $r(x)$ *задачи (1)–(2) удовлетворяет следующим условиям*:

1) $r(x) \in C^{\infty}$ *в области* $0 < x^* - x < \rho_1$, *где* $\rho_1 = const$ *и* x^* *– подвижная особая точка решения* $y(x)$ *рассматриваемой задачи*;

2) $\exists M_1 : \dfrac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!} \le M_1$, *где* $M_1 = const,\ n = 0, 1, 2, \dots$.

Тогда существует единственное решение задачи Коши (1)–(2) в виде (3), где $\rho = -1/4$, $C_0 \ne 0$, *правильная часть которого сходится в области* $0 < x^* - x < \rho_3$, *при этом* $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, $\rho_2 = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^8 (M+1)^4}}$, $M = \sup\limits_n \dfrac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!}$, $n = 0,\ 1,\ 2 \dots$.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $r(x) \in C^{\infty}$ *в области* $|\tilde{x}^* - x| < \rho_3$, *где* $\rho_3 = const > 0$ *и* $\tilde{x}^*$ *– приближенное значение подвижной особой точки решения* $y(x)$ *задачи Коши (1)–(2);*

2) $\exists M_1 : \dfrac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \le M_1$, *где* $M_1 = const,\ n = 0, 1, 2, \dots$;

3) $\tilde{x}^* \le x^*$;

4) *известна оценка погрешности значения* $\tilde{x}^*$: $|x^* - \tilde{x}^*| \le \Delta \tilde{x}^*$;

5) $\Delta \tilde{x}^* < \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^8 (M_2 + \Delta M + 1)^4}}$,

где

$$M_2 = \sup_n \frac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!},\ \Delta M = \left(\sup_{n,U} \frac{|r^{(n+1)}(x)|}{n!} \right) \Delta \tilde{x}^*,\ n = 0, 1, 2, \dots,\ U = \{ x : |\tilde{x}^* - x| \le \Delta \tilde{x}^* \}.$$

Тогда для приближенного решения (5) задачи (1)–(2) в области

$$G = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \tag{6}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{y}_N(x) \le \sum_{i=1}^{4} \Delta_i ,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\Delta \tilde{x}^*}{4\sqrt{2}\ |\tilde{x}_1^* - x|^{5/4}} ,$$

$$\Delta_2 \le \frac{\Delta \tilde{x}^* (M_2 + \Delta M + 1)}{1 - 4(M_2 + \Delta M + 1)|\tilde{x}_2^* - x|^{5/4}} \sum_{i=0}^{4} \frac{|\tilde{x}_2^* - x|^{i/4}}{9+i} ,$$

$$\Delta_3 \le \frac{\Delta M\ |\tilde{x}_2^* - x|}{1 - 4(M_2 + \Delta M + 1)|\tilde{x}_2^* - x|^{5/4}} \sum_{i=0}^{4} \frac{|\tilde{x}_2^* - x|^{i/4}}{9+i} ,$$

$$\Delta_4 \le \frac{2^{-2}\,|\tilde{x}^* - x|^{N/4}}{1 - 4\,(M_2 + 1)\,|\tilde{x}^* - x|^{5/4}} \sum_{i=0}^{4} \frac{\left(4(M_2+1)\right)^{[(N+1+i)/5]}}{N+5+i} |\tilde{x}^* - x|^{i/4} ,$$

при этом

$$\widetilde{x}_1^* = \widetilde{x}^* - \Delta\widetilde{x}^*, \ \widetilde{x}_2^* = \widetilde{x}^* + \Delta\widetilde{x}^*,$$

$$G_1 = \left\{x:\ x < \widetilde{x}_1^*\right\},\ G_2 = \left\{x:\ |\widetilde{x}_2^* - x| < \frac{1}{\sqrt[5]{2^8(M_2 + \Delta M + 1)^4}}\right\},\ G_3 = \left\{x:\ |\widetilde{x}^* - x| < \rho_3\right\}.$$

Доказательство. Оценим

$$\Delta\widetilde{y}_N(x) = |y(x) - \widetilde{y}_N(x)| \le |y(x) - \widetilde{y}(x)| + |\widetilde{y}(x) - \widetilde{y}_N(x)|.$$

Фактически нужно оценить $|\widetilde{y}(x) - y(x)|$, применим другой подход к оценке этого выражения, в отличие от варианта, предложенного в работе [12]. Согласно [1] получаем:

$$|y(x) - \widetilde{y}(x)| = |\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{(n-1)/4} - \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n (\widetilde{x}^* - x)^{(n-1)/4}| \le$$

$$\le \sup_U \left|\frac{\partial \widetilde{y}(x)}{\partial \widetilde{x}^*}\right| \Delta\widetilde{x}^* + \sum_{n=0}^{\infty} \sup_U \left|\frac{\partial \widetilde{y}(x)}{\partial \widetilde{C}_n}\right| \Delta\widetilde{C}_n,$$

где $U = \left\{x:\ |\widetilde{x}^* - x| \le \Delta\widetilde{x}^*\right\}$.

В силу условия 2 этой теоремы существует такое M_2, что

$$M_2 = \sup_n \frac{|r^{(n)}(\widetilde{x}^*)|}{n!}, \tag{7}$$

при этом в соответствии с [1]

$$\Delta M = \left(\sup_{n,U} \frac{|r^{(n+1)}(x)|}{n!}\right) \Delta\widetilde{x}^*,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Затем

$$\sup_U \left|\frac{\partial \widetilde{y}(x)}{\partial \widetilde{x}^*}\right| \Delta\widetilde{x}^* = \sup_U \left| \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n \frac{n-1}{4} (\widetilde{x}^* - x)^{(n-5)/4} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n-1|}{4} \sup_U |\widetilde{C}_n| \sup_U |\widetilde{x}^* - x|^{(n-5)/4},$$

причем

$$\sup_U |\widetilde{x}^* - x|^{(n-5)/4} = \begin{cases} |\widetilde{x}_1^* - x|^{(n-5)/4},\ n = 0, 1, 2, 3, 4; \\ |\widetilde{x}_2^* - x|^{(n-5)/4},\ n = 5, 6, \ldots \end{cases}$$

и

$$\sup_U \left|\frac{\partial \widetilde{y}(x)}{\partial \widetilde{C}_n}\right| = \sup_U |\widetilde{x}^* - x|^{(n-1)/4} = \begin{cases} |\widetilde{x}_1^* - x|^{(n-1)/4},\ n = 0; \\ |\widetilde{x}_2^* - x|^{(n-1)/4},\ n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{x}_1^* = \widetilde{x}^* - \Delta\widetilde{x}^*,\ \ \widetilde{x}_2^* = \widetilde{x}^* + \Delta\widetilde{x}^*.$$

Принимая во внимание (7), (8) и оценки для коэффициентов C_n, полученные в работе [12],

$$|C_n| \le \frac{2^{2[n/5]-2}}{n+4}(M+1)^{[n/5]} = \upsilon_n, \tag{9}$$

здесь $M = \sup\limits_n \dfrac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!}$, а также с учетом того, что для коэффициентов структуры решения

$$\tilde{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (\tilde{x}^* - x)^{(n-1)/4}, \ \tilde{C}_0 \neq 0,$$

имеем [12]:

$$\tilde{C}_n = \tilde{C}_n(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m), \ n = 1, 2, \ldots, \ m = 1, 2, \ldots,$$

где правые части этих соотношений представляют собой полиномы с положительными коэффициентами относительно коэффициентов разложения функции $r(x)$ в регулярный ряд по целым неотрицательным степеням, получаем:

$$\sup_U |\tilde{C}_n| \leq \tilde{C}_n(|A_0 + \Delta\tilde{A}_0|, |A_1 + \Delta\tilde{A}_1|, \ldots) \leq \tilde{C}_n(M_2 + \Delta M + 1) = \tilde{\upsilon}_n.$$

Таким образом,

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \Delta\tilde{x}^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n-1|}{4} \tilde{\upsilon}_n \sup_U |\tilde{x}^* - x|^{(n-5)/4} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n \sup_U |\tilde{x}^* - x|^{(n-1)/4}.$$

Поскольку [12]

$$C_0 = \tilde{C}_0 = \pm 1/\sqrt{2}, \ C_i = \tilde{C}_i = 0, \ i = 1, \ldots, 4, \ \Delta\tilde{C}_j = 0, \ j = 0, \ldots, 4,$$

будем иметь

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \frac{\Delta\tilde{x}^*}{4\sqrt{2}\,|\tilde{x}_1^* - x|^{5/4}} + \Delta\tilde{x}^* \sum_{n=5}^{\infty} \tilde{\upsilon}_n |\tilde{x}_2^* - x|^{(n-5)/4} + \sum_{n=5}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n |\tilde{x}_2^* - x|^{(n-1)/4}.$$

Следовательно, для выражения $\Delta\tilde{y}_N(x)$ получаем:

$$\Delta\tilde{y}_N(x) = |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leq$$

$$\leq \frac{\Delta\tilde{x}^*}{4\sqrt{2}\,|\tilde{x}_1^* - x|^{5/4}} + \Delta\tilde{x}^* \sum_{n=5}^{\infty} \tilde{\upsilon}_n |\tilde{x}_2^* - x|^{(n-5)/4} + \sum_{n=5}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n |\tilde{x}_2^* - x|^{(n-1)/4} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n|\,|\tilde{x}^* - x|^{(n-1)/4} =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \Delta_i.$$

Отсюда для Δ_1 следует:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta\tilde{x}^*}{4\sqrt{2}\,|\tilde{x}_1^* - x|^{5/4}}.$$

Переходим к оценке выражения Δ_2. Так как в силу (9)

$$\tilde{\upsilon}_n = \frac{2^{2[n/5]-2}}{n+4}(M_2 + \Delta M + 1)^{[n/5]},$$

получаем

$$\Delta_2 = \Delta\tilde{x}^* \sum_{n=5}^{\infty} \tilde{\upsilon}_n |\tilde{x}_2^* - x|^{(n-5)/4} = \Delta\tilde{x}^* \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\upsilon}_{5k} |\tilde{x}_2^* - x|^{5(k-1)/4} +$$

$$+ \Delta\tilde{x}^* \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\upsilon}_{5k+1} |\tilde{x}_2^* - x|^{(5k-4)/4} + \Delta\tilde{x}^* \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\upsilon}_{5k+2} |\tilde{x}_2^* - x|^{(5k-3)/4} +$$

$$+\Delta\widetilde{x}^*\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\upsilon}_{5k+3}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-2)/4}+\Delta\widetilde{x}^*\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\upsilon}_{5k+4}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-1)/4}=$$

$$=\Delta\widetilde{x}^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+4}(M_2+\Delta M+1)^k\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{5(k-1)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{x}^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+5}(M_2+\Delta M+1)^k\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-4)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{x}^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+6}(M_2+\Delta M+1)^k\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-3)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{x}^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+7}(M_2+\Delta M+1)^k\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-2)/4}+$$

$$+\Delta\widetilde{x}^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+8}(M_2+\Delta M+1)^k\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-1)/4}\leq$$

$$\leq\frac{\Delta\widetilde{x}^*(M_2+\Delta M+1)}{1-4(M_2+\Delta M+1)\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{5/4}}\sum_{i=0}^{4}\frac{|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{i/4}}{9+i}.$$

Теперь оценим выражение Δ_3. Воспользуемся оценками для $\Delta\widetilde{C}_n$, полученными в работе [12]:

$$\Delta\widetilde{C}_n\leq\frac{2^{2[n/5]-2}}{n+4}\Delta M(M_2+\Delta M+1)^{[n/5]-1}.$$

Итак,

$$\Delta_3=\sum_{n=5}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_n\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(n-1)/4}=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-1)/4}+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+1}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{5k/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+2}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k+1)/4}+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+3}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k+2)/4}+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{5k+4}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k+3)/4}\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+4}\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k-1)/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+5}\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{5k/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+6}\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k+1)/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+7}\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k+2)/4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{5k+8}\Delta M\,(M_2+\Delta M+1)^{k-1}\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{(5k+3)/4}\leq$$

$$\leq\frac{\Delta M\,|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|}{1-4(M_2+\Delta M+1)|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{5/4}}\sum_{i=0}^{4}\frac{|\,\widetilde{x}_2^*-x\,|^{i/4}}{9+i}.$$

Наконец, согласно результатам работы [12] для выражения Δ_4 справедлива оценка

$$\Delta_4 \le \frac{2^{-2}\,|\,\tilde{x}^* - x\,|^{N/4}}{1 - 4\,(M_2+1)\,|\,\tilde{x}^* - x\,|^{5/4}} \sum_{i=0}^{4} \frac{\big(4\,(M_2+1)\big)^{[(N+1+i)/5]}}{N+5+i}\,|\,\tilde{x}^* - x\,|^{i/4}\,.$$

Заметим, что оценка для Δ_1 справедлива в области $G_1 = \left\{x:\ x < \tilde{x}_1^*\right\}$, оценки для Δ_2 и Δ_3 – в области $G_2 = \left\{x:\ |\,\tilde{x}_2^* - x\,| < \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^8 (M_2 + \Delta M + 1)^4}}\right\}$, а оценка для Δ_4 – в области $G_3 = \left\{x:\ |\,\tilde{x}^* - x\,| < \rho_3\right\}$, где ρ_3 определяется из теоремы 1. Следовательно, оценка для $\Delta\tilde{y}_N(x)$ верна в области (6), что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Теорема 2 справедлива в области (6), где

$$G_1 = \left\{x:\ x > \tilde{x}_1^*\right\},\ \tilde{x}_1^* = \tilde{x}^* + \Delta\tilde{x}^*,\ \tilde{x}_2^* = \tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^*,$$

если вместо условия 3 этой теоремы выполняется условие $\tilde{x}^* \ge x^*$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи Коши (1)–(2), где

$$r(x) = 0 \ \text{ и } \ y(1) = 1,$$

в окрестности приближенного значения подвижной особой точки.

Решение. Задача имеет точное решение $y = 1/\sqrt[4]{5-4x}$. $x^* = 1{,}25$ – точное значение подвижной особой точки (критический полюс); $\tilde{x}^* = 1{,}2499$ – приближенное значение подвижной особой точки; $\Delta\tilde{x}^* = 0{,}0001$; значение $x_1 = 1{,}121$ попадает в область действия теоремы 2. Рассмотрим случай $C_0 = 1/\sqrt{2}$. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Оценка приближенного решения уравнения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки в вещественной области

x_1	$y(x_1)$	$\tilde{y}_3(x_1)$	Δ	Δ'	Δ''
1,121	1,17988	1,18011	0,0002	0,0513	0,0016

Здесь $y(x_1)$ – значение точного решения, $\tilde{y}_3(x_1)$ – значение приближенного решения, Δ – абсолютная погрешность, Δ' – априорная погрешность, найденная по теореме 2, Δ'' – апостериорная погрешность.

С помощью теоремы 2 можно решить и обратную задачу теории погрешности – определить значение N по заданной точности приближенного решения ε. Так, для $\varepsilon = 0{,}0016$ получаем $N = 15$.

В следующей таблице приведено сравнение результатов, полученных по теореме 2 настоящей работы и по теореме 3 работы [12]. Значение $x_2 = 1{,}236$ попадает в область действия указанных выше теорем.

Таблица 2

Сравнение оценок приближенного решения уравнения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки в вещественной области

x_2	$y(x_2)$	$\tilde{y}_3(x_2)$	$\lvert y-\tilde{y}_3 \rvert$	Δ'_{I}	Δ'_{II}
1,236	2,05567	2,05936	0,0037	0,0079	0,0073

Здесь $y(x_2)$ – значение точного решения, $\tilde{y}_3(x_2)$ – значение приближенного решения, $\lvert y-\tilde{y}_3 \rvert$ – абсолютная погрешность, Δ'_{I} – априорная погрешность, найденная по теореме 3 работы [12], Δ'_{II} – априорная погрешность, найденная по теореме 2 настоящей работы.

Резюме. Предложены исследования, позволяющие значительно расширить область применения приближенного решения (5) задачи Коши (1)–(2) в окрестности приближенного значения подвижной особой точки и получить точные границы этой области. При этом представленные в таблице 2 расчеты подтверждают адекватность результата теоремы 2 этой работы с результатом теоремы 3 в работе [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975. – 632 с.

2. *Орлов, В. Н.* Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.

3. *Орлов, В. Н.* Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4 (18). – С. 2–6.

4. *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2008. – № 63. – С. 102–108.

5. *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 112 с.

6. *Орлов, В. Н.* Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова / Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. – Киев. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.

7. *Орлов, В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиационного института. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.

8. *Орлов, В. Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.

9. *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 113–122.

10. *Орлов, В. Н.* Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 399–405.

11. *Орлов, В. Н.* Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5. – № 10. – С. 192–195.

12. *Редкозубов, С. А.* Исследование приближенного решения задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки / С. А. Редкозубов, В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Известия института инженерной физики. – 2013. – № 2 (28). – С. 3–6.