УДК 514.764.5

ВНУТРЕННИЕ ОСНАЩЕНИЯ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

INTRINSIC FRAMING OF HYPER-BAND DISTRIBUTION IN CONFORMAL CONNECTION

Н. Ю. Никитина

N. Y. Nikitina

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары

Аннотация. В данной статье изучается гиперполосное распределение, вложенное в пространство конформной связности $C_{n,n}$. В первой и второй дифференциальной окрестности построены инвариантные полные оснащения гиперполосного распределения, определяемые внутренним образом.

Abstract. This article studies the hyper-band distribution in conformal connection $C_{n,n}$. The invariant full intrinsic framings of hyper-band distribution are constructed in the first and second differential neighborhoods.

Ключевые слова: *пространство конформной связности, гиперполосное распределение, оснащение.*

Keywords: *conformal connection, hyper-band distribution, framing.*

Актуальность исследуемой проблемы. Внутренняя геометрия гиперполосного распределения в пространстве конформной связности $C_{n,n}$ практически не разработана. Построенные оснащения применяются при изучении линейных связностей, индуцируемых при различных нормализациях гиперполосного распределения в $C_{n,n}$.

Материал и методика исследований. В работе применяются инвариантные методы дифференциальной геометрии: метод продолжений и охватов Лаптева [3] и метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [9].

Результаты исследований и их обсуждение. На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}; \; I, J, K, L, M, P, Q = \overline{1, n}; \; \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n};$$

$$i, j, k, s, t = \overline{1, m}; \; a, b, c = \overline{1, n-1}; \; u, v, w, z = \overline{m+1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство конформной связности $C_{n,n}$ [6], [7], базой которого служит многообразие B_n, слоями – конформные пространства C_n размерности n. Структурные формы ω_λ^μ пространства $C_{n,n}$ подчинены структурным уравнениям [6], [7].

$$D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu + \frac{1}{2} R_{\lambda KL}^\mu \omega^K \wedge \omega^L, \omega_\rho^\rho = 0, \tag{1}$$

где $R_{\lambda KL}^\mu$ – тензор кривизны-кручения пространства $C_{n,n}$. Отнесем пространство $C_{n,n}$ к полю полуизотропных реперов $R = \{A_\lambda\}$ [2]. Система дифференциальных уравнений бесконечно малого перемещения репера R в слое имеет вид

$$\delta A_\lambda = \pi_\lambda^\rho A_\rho. \tag{2}$$

Согласно работе [7] при таком выборе репера формы Пфаффа ω_λ^μ пространства $C_{n,n}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \\ &(\text{б}) \quad \omega_I^{n+1} + g_{IK}\omega_0^K = 0, \omega_I^0 + g_{IK}\omega_{n+1}^K = 0, \\ &(\text{в}) \quad dg_{IJ} - g_{IK}\omega_J^K - g_{KJ}\,\omega_I^K = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где g_{IJ} – метрический тензор пространства $C_{n,n}$.

В каждой точке A_0 слоя C_n возьмем n линейно независимых гиперсфер P_K:

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0 + x_i^\beta A_\beta + x_i^{n+1} A_{n+1}, \;\; P_\alpha = A_\alpha + x_\alpha^0 A_0 + x_\alpha^j A_j + x_\alpha^{n+1} A_{n+1}.$$

Пусть гиперсферы P_i и P_α проходят через точку A_0: $(P_i A_0) = x_i^{n+1} = 0$, $(P_\alpha A_0) = x_\alpha^{n+1} = 0$; следовательно, имеем:

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0 + x_i^\beta A_\beta, P_\alpha = A_\alpha + x_\alpha^0 A_0 + x_\alpha^j A_j. \tag{4}$$

Согласно [6] *m-мерным линейным элементом* (A_0, L_m) называется совокупность точки A_0 и m-параметрической связки L_m гиперсфер $P = \xi^j P_j + \xi^0 A_0$, натянутых на A_0 и базисные гиперсферы P_j; аналогично, $(n-m)$-мерным линейным элементом (A_0, L_{n-m}) называется совокупность точки A_0 и связки L_{n-m} гиперсфер $Q = \eta^\alpha P_\alpha + \eta^0 A_0$.

В силу (3), (4) структурные формы полей связок L_m и L_{n-m}, то есть полей объектов x_i^α, x_α^i, имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \Delta x_i^\alpha &= dx_i^\alpha + x_i^\gamma \omega_\gamma^\beta - x_j^\alpha \omega_i^j + \omega_i^\alpha - x_i^\gamma x_j^\alpha \omega_\gamma^j, \\ \Delta x_\alpha^i &= dx_\alpha^i + x_\alpha^k \omega_k^i - x_\beta^i \omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^i - x_\alpha^k x_\gamma^i \omega_k^\gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

По аналогии с работой [6] *распределениями m-мерных* (A_0, L_m) и $(n-m)$*-мерных элементов* (A_0, L_{n-m}) в пространстве конформной связности $C_{n,n}$ назовем n-мерные погруженные многообразия $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ в пространствах представления $\{\Delta x_i^\alpha, \omega_0^K\}$ и $\{\Delta x_\alpha^i, \omega_0^K\}$, определяемые системами дифференциальных уравнений соответственно

$$\Delta x_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \;\; \Delta x_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K. \tag{6}$$

В силу соотношений (5), (6) имеем:

$$\begin{aligned} &dx_i^\alpha + x_i^\gamma \omega_\gamma^\beta - x_j^\alpha \omega_i^j + \omega_i^\alpha - x_i^\gamma x_j^\alpha \omega_\gamma^j = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \\ &dx_\alpha^i + x_\alpha^k \omega_k^i - x_\beta^i \omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^i - x_\alpha^k x_\gamma^i \omega_k^\gamma = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K. \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно уравнениям (7) возможна частичная канонизация [4] репера $R = \{A_\lambda\}$:

$$x_i^\alpha = x_\alpha^i = 0, \tag{8}$$

тогда формы $\omega_i^\alpha, \omega_\alpha^i$ становятся главными:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K. \tag{9}$$

В специализированном репере R (то есть выполняются соотношения (8)) гиперсферы P_i, P_α (см. (4)) имеют следующие разложения:

$$P_i = x_i^0 A_0 + A_i, \; P_\alpha = x_\alpha^0 A_0 + A_\alpha. \tag{10}$$

Пусть выполняются равенства

$$(P_i P_\alpha) \equiv (A_i A_\alpha) = g_{i\alpha} = 0. \tag{11}$$

Геометрически это означает, что текущие элементы L_m и L_{n-m} распределений $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ в каждом центре A_0 ортогональны. Распределения $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ называются *взаимно ортогональными* [6], если выполняются равенства (11). По аналогии с [6] частично канонизированный репер R, определяемый равенствами (8), (9), назовем полуортогональным репером 0-го порядка, адаптированным к взаимно ортогональным распределениям $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$.

Согласно (3), (11) тензоры g_{ij} и $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered} dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 0, \; dg_{\alpha\beta} - g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma - g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma = 0, \; g_1 \stackrel{def}{=} \left|g_{ij}\right| \neq 0, \\ g_2 \stackrel{def}{=} \left|g_{\alpha\beta}\right| \neq 0, \; d\ln g_1 - 2\omega_k^k = 0, \; d\ln g_2 - 2\omega_\gamma^\gamma = 0, \; g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j, \\ g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta, \; dg^{ij} + g^{kj}\omega_k^i + g^{ik}\omega_k^j = 0, \; dg^{\alpha\beta} + g^{\gamma\beta}\omega_\gamma^\alpha + g^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^\beta = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Из уравнений (3) для равенств (11) следует $g_{ij}\,\omega_\alpha^j + g_{\alpha\beta}\,\omega_i^\beta = 0$, из чего в силу уравнений (9) найдем связь между компонентами полей фундаментальных объектов первого порядка на распределниях $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$:

$$g_{ij}\,\Lambda_{\alpha K}^j + g_{\alpha\beta}\,\Lambda_{iK}^\beta = 0.$$

Пусть в некоторой области U базы B_n для любой точки $A_0 \in B_n$ имеет место $L_m \subset L_{n-1}$, $m < n-1$. Здесь L_{n-1} есть совокупность гиперсфер $P = \xi^i P_i + \xi^\nu P_\nu + A_0$, натянутых на гиперсферы P_i, P_ν и точку A_0, то есть $L_{n-1} \equiv [A_0 P_i P_\nu]$, где $P_\nu = x_\nu^0 A_0 + A_\nu$. По аналогии с работой [5] пару распределений $\mathcal{K}$ m-мерных линейных элементов (A_0, L_m) и $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов (A_0, L_{n-1}) с таким отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре A_0 обозначим $\mathcal{F}$ и назовем *гиперполосным распределением* m-мерных линейных элементов (A_0, L_m), $m < n-1$. Распределение $\mathcal{K}$ m-мерных линейных элементов (A_0, L_m) назовем *базисным*, а распределение $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов (A_0, L_{n-1}) – *оснащающим*.

В силу соотношений (2), (10) условие инвариантности элемента L_{n-1} ($\delta A_0 \subset L_{n-1}, \delta P_i \subset L_{n-1}, \delta P_v \subset L_{n-1}$) выполняется при $\pi_v^n = 0$, следовательно, формы ω_v^n должны быть главными:

$$\omega_v^n = \Lambda_{vK}^n \omega_0^K . \tag{13}$$

Из уравнений (12_2), учитывая (13), имеем:

$$dg_{vn} - g_{vu}\omega_n^u - g_{vn}\omega_n^n - g_{un}\omega_v^u = g_{vnK}\omega_0^K,\ g_{vnK}\omega_0^K = g_{nn}\omega_v^n = g_{nn}\Lambda_{vK}^n\omega_0^K . \tag{14}$$

Из последних уравнений в силу леммы Остиану [4] в случае $|g_{vu}| \neq 0$ возможна частичная канонизация репера R, при которой

$$g_{vn} = 0 . \tag{15}$$

При такой специализации репера R распределения $\mathcal{D}$ и $\mathcal{H}$ являются взаимно ортогональными, то есть текущие элементы $L_{n-m-1} \equiv [A_0 P_v]$ и $L_1 \equiv [A_0 P_n]$ распределений $(n-m-1)$-мерных линейных элементов $\mathcal{D}$ и одномерных линейных элементов $\mathcal{H}$ взаимно ортогональны.

Из уравнений (14) в силу (15) следует

$$\omega_n^u = \Lambda_{nK}^u \omega_0^K . \tag{16}$$

Из (14)–(16) получим

$$g_{vu}\Lambda_{nK}^u + g_{nn}\Lambda_{vK}^n = 0 .$$

В силу $|g_{KL}| \neq 0$, $|g_{ij}| \neq 0$, $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$, $|g_{vu}| \neq 0$ справедливо $g_{nn} \neq 0$. Совокупность функций g_{vu} является невырожденным симметричным тензором, а функция g_{nn} – невырожденным относительным инвариантом:

$$dg_{vu} - g_{wu}\omega_v^w - g_{vw}\omega_u^w = 0,\ dg_{nn} - 2g_{nn}\omega_n^n = 0,\ g_{vw}g^{wu} = \delta_v^u,\ g_{nn}g^{nn} = 1, \tag{17}$$

$$dg^{vu} + g^{wu}\omega_w^v + g^{vw}\omega_w^u = 0,\ dg^{nn} + 2g^{nn}\omega_n^n = 0 .$$

Тогда в полуизотропном [2] полуортогональном [6], [8] репере R дифференциальные уравнения гиперполосного распределения $\mathcal{F}$ в пространстве $C_{n,n}$ примут вид

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K,\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K,\ \omega_v^n = \Lambda_{vK}^n \omega_0^K,\ \omega_n^v = \Lambda_{nK}^v \omega_0^K . \tag{18}$$

Продолжая уравнения (18), имеем:

$$d\Lambda_{ij}^v + \Lambda_{ij}^v\omega_0^0 - \Lambda_{kj}^v\omega_i^k - \Lambda_{ik}^v\omega_j^k + \Lambda_{ij}^u\omega_u^v - g_{ij}\omega_{n+1}^v = \Lambda_{ijL}^v\omega_0^L ,$$

$$d\Lambda_{iu}^v + \Lambda_{iu}^v\omega_0^0 - \Lambda_{ku}^v\omega_i^k - \Lambda_{iw}^v\omega_u^w + \Lambda_{iu}^w\omega_w^v - \delta_u^v\omega_i^0 = \Lambda_{iuL}^v\omega_0^L ,$$

$$d\Lambda_{in}^v + \Lambda_{in}^v\omega_0^0 - \Lambda_{kn}^v\omega_i^k - \Lambda_{in}^v\omega_n^n + \Lambda_{in}^u\omega_u^v = \Lambda_{inL}^v\omega_0^L ,$$

$$d\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n\omega_0^0 - \Lambda_{kj}^n\omega_i^k - \Lambda_{ik}^n\omega_j^k + \Lambda_{ij}^n\omega_n^n - g_{ij}\omega_{n+1}^n = \Lambda_{ijL}^n\omega_0^L ,$$

$$d\Lambda_{iv}^n + \Lambda_{iv}^n\omega_0^0 - \Lambda_{kv}^n\omega_i^k - \Lambda_{iu}^n\omega_v^u + \Lambda_{iv}^n\omega_n^n = \Lambda_{ivL}^n\omega_0^L,\ d\Lambda_{in}^n + \Lambda_{in}^n\omega_0^0 - \Lambda_{kn}^n\omega_i^k - \omega_i^0 = \Lambda_{inL}^n\omega_0^L ,$$

$$d\Lambda_{vj}^i + \Lambda_{vj}^i\omega_0^0 - \Lambda_{uj}^i\omega_v^u - \Lambda_{vk}^i\omega_j^k + \Lambda_{vj}^k\omega_k^i - \delta_j^i\omega_v^0 = \Lambda_{vjL}^i\omega_0^L ,$$

$$d\Lambda_{vu}^i + \Lambda_{vu}^i\omega_0^0 - \Lambda_{wu}^i\omega_v^w - \Lambda_{vw}^i\omega_u^w + \Lambda_{vu}^k\omega_k^i - g_{vu}\omega_{n+1}^i = \Lambda_{vuL}^i\omega_0^L ,$$

$$
\begin{gathered}
d\Lambda^i_{vn} + \Lambda^i_{vn}\omega^0_0 - \Lambda^i_{wn}\omega^w_v - \Lambda^i_{vn}\omega^n_n + \Lambda^k_{vn}\omega^i_k = \Lambda^i_{vnL}\omega^L_0\,,\\
d\Lambda^i_{nj} + \Lambda^i_{nj}\omega^0_0 - \Lambda^i_{nj}\omega^n_n - \Lambda^i_{nk}\omega^k_j + \Lambda^k_{nj}\omega^i_k - \delta^i_j\omega^0_n = \Lambda^i_{njL}\omega^L_0\,, \qquad (19)\\
d\Lambda^i_{nv} + \Lambda^i_{nv}\omega^0_0 - \Lambda^i_{nv}\omega^n_n - \Lambda^i_{nw}\omega^w_v + \Lambda^k_{nv}\omega^i_k = \Lambda^i_{nvL}\omega^L_0\,,\\
d\Lambda^i_{nn} + \Lambda^i_{nn}\omega^0_0 - 2\Lambda^i_{nn}\omega^n_n + \Lambda^k_{nn}\omega^i_k - g_{nn}\omega^i_{n+1} = \Lambda^i_{nnL}\omega^L_0\,,\\
d\Lambda^n_{vi} + \Lambda^n_{vi}\omega^0_0 - \Lambda^n_{ui}\omega^u_v - \Lambda^n_{vk}\omega^k_i + \Lambda^n_{vi}\omega^n_n = \Lambda^n_{viL}\omega^L_0\,,\\
d\Lambda^n_{vu} + \Lambda^n_{vu}\omega^0_0 - \Lambda^n_{wu}\omega^w_v - \Lambda^n_{vw}\omega^w_u + \Lambda^n_{vu}\omega^n_n - g_{vu}\omega^n_{n+1} = \Lambda^n_{vuL}\omega^L_0\,,\\
d\Lambda^n_{vn} + \Lambda^n_{vn}\omega^0_0 - \Lambda^n_{wn}\omega^w_v - \omega^0_v = \Lambda^n_{vnL}\omega^L_0\,,\ d\Lambda^v_{ni} + \Lambda^v_{ni}\omega^0_0 - \Lambda^v_{ni}\omega^n_n - \Lambda^v_{nk}\omega^k_i + \Lambda^u_{ni}\omega^v_u = \Lambda^v_{niL}\omega^L_0\,,\\
d\Lambda^v_{nu} + \Lambda^v_{nu}\omega^0_0 - \Lambda^v_{nu}\omega^n_n - \Lambda^v_{nw}\omega^w_u + \Lambda^w_{nu}\omega^v_w - \delta^v_u\omega^0_i = \Lambda^v_{iuL}\omega^L_0\,,\\
d\Lambda^v_{nn} + \Lambda^v_{nn}\omega^0_0 - 2\Lambda^v_{nn}\omega^n_n + \Lambda^w_{nn}\omega^v_w - g_{nn}\omega^v_{n+1} = \Lambda^v_{nnL}\omega^L_0\,.
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, что каждая из шести систем функций $\{\Lambda^n_{iv}\}$, $\{\Lambda^v_{in}\}$, $\{\Lambda^n_{vi}\}$, $\{\Lambda^i_{vn}\}$, $\{\Lambda^i_{nv}\}$, $\{\Lambda^v_{ni}\}$ образует тензор первого порядка [3].

Из последних уравнений системы (3) для равенств (11) и (15) имеем:

$$
g_{ij}\Lambda^j_{vK} + g_{uv}\Lambda^u_{iK} = 0\,,\ g_{ij}\Lambda^j_{nK} + g_{nn}\Lambda^n_{iK} = 0\,, g_{vu}\Lambda^u_{nK} + g_{nn}\Lambda^n_{vK} = 0\,.
$$

Обозначим через $[P_\alpha]$ пересечение $n-m$ гиперсфер P_α, представляющее собой $(n-m)$-параметрическую связку m-сфер, проходящих через точку A_0. Так как в каждом центре $A_0 \in \mathcal{K}$ распределения $\mathcal{K}$ и *Л* ортогональны, то все m-сферы $[P_\alpha]$ касаются образующего элемента L_m распределения $\mathcal{K}$ в его центре A_0. Аналогично, $[P_i]$ есть пересечение m гиперсфер P_i, представляющее собой m-параметричекую связку $(n-m)$-мерных сфер, проходящих через точку A_0. Все $(n-m)$-сферы $[P_i]$ касаются образующего элемента L_{n-m} распределения *Л*. Тогда *полем касательных* m-сфер распределения $\mathcal{K}$ назовем поле $[P_\alpha]$, а *полем нормальных* $(n-m)$-сфер – поле $[P_i]$ [6], [8].

Полное оснащение распределений $\mathcal{K}$ и *Л* эквивалентно тому, что в пространстве $C_{n,n}$ задается дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X_{n+1}$, $X_{n+1} \neq A_0$, где точка X_{n+1} оснащающего поля в полуортогональном полуизотропном конформном репере R имеет разложение [6] $X_{n+1} = -\frac{1}{2}[g^{ij}x^0_i x^0_j + g^{\alpha\beta}x^0_\alpha x^0_\beta]A_0 - g^{ij}x^0_j A_i - g^{\alpha\beta}x^0_\beta A_\alpha + A_{n+1}$.

В выражениях гиперсфер P_i и P_α (см. (10)) функции x^0_i, x^0_α подчинены дифференциальным уравнениям:

$$
dx^0_i + x^0_i\,\omega^0_0 - x^0_j\,\omega^j_i + \omega^0_i = x^0_{iK}\,\omega^K_0\,, dx^0_\alpha + x^0_\alpha\,\omega^0_0 - x^0_\beta\,\omega^\beta_\alpha + \omega^0_\alpha = x^0_{\alpha K}\,\omega^K_0\,, \qquad (20)
$$

следовательно, задавая поля функций x^0_i, x^0_α, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (20), имеем полное оснащение распределений $\mathcal{K}$ и *Л* [6], [8].

Под *полным оснащением* гиперполосного распределения $\mathcal{F}$ в пространстве $C_{n,n}$ будем понимать полное оснащение его базисного распределения $\mathcal{K}$, определяемого полями квазитензоров x^0_i, x^0_α.

Нормальным оснащением гиперполосного распределения $\mathcal{F}$ в пространстве $C_{n,n}$ называется частичное оснащение базисного распределения $\mathcal{K}$, определяемое полем квазитензора x_i^0, то есть полем нормальных $(n-m)$-сфер $[P_i]$ [6], [8]. При этом для разложений (10) выполняется первая группа уравнений системы (20).

Касательным оснащением гиперполосного распределения $\mathcal{F}$ в пространстве $C_{n,n}$ называется частичное оснащение базисного распределения $\mathcal{K}$, определяемое полем квазитензора x_α^0, то есть полем касательных m-сфер $[P_\alpha]$ [6], [8]. При этом для разложений (10) выполняется вторая группа уравнений системы (20).

В силу (18) вторую группу дифференциальных уравнений (20) запишем в виде

$$dx_v^0 + x_v^0\omega_0^0 - x_u^0\omega_v^u + \omega_v^0 = x_{vK}^0\,\omega_0^K,\ dx_n^0 + x_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x_{nK}^0\,\omega_0^K, \tag{21}$$

то есть, чтобы задать касательное оснащение гиперполосного распределения $\mathcal{F}$, нужно задать поля квазитензоров $(x_v^0), (x_n^0)$.

Рассмотрим функции

$$\Lambda_i^0 \overset{def}{=} -\Lambda_{in}^n = g_{ij}g^{nn}\Lambda_{nn}^j,\ \hat{\Lambda}_i^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{n-m-1}\Lambda_{iu}^u = \frac{1}{n-m-1}g_{ij}g^{uv}\Lambda_{uv}^j. \tag{22}$$

Согласно (19), (17), (12) функции Λ_i^0 и $\hat{\Lambda}_i^0$ образуют квазитензор:

$$d\Lambda_i^0 + \Lambda_i^0\omega_0^0 - \Lambda_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = \Lambda_{iK}^0\omega_0^K, \tag{23}$$

$$d\hat{\Lambda}_i^0 + \hat{\Lambda}_i^0\omega_0^0 - \hat{\Lambda}_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = \hat{\Lambda}_{iK}^0\omega_0^K. \tag{24}$$

В силу (20), (23), (24) нормальное оснащение базисного распределения $\mathcal{K}$ в первой дифференциальной окрестности внутренним образом определяется полями квазитензоров (22).

Рассмотрим функции

$$\Lambda_v^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\Lambda_{vi}^i = \frac{1}{m}g_{vu}g^{st}\Lambda_{st}^u,\ \hat{\Lambda}_v^0 \overset{def}{=} -\Lambda_{vn}^n = g_{vu}g^{nn}\Lambda_{nn}^u, \tag{25}$$

$$\Lambda_n^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\Lambda_{ni}^i = \frac{1}{m}g_{nn}g^{st}\Lambda_{st}^n,\ \hat{\Lambda}_n^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{n-m-1}\Lambda_{nu}^u = \frac{1}{n-m-1}g_{nn}g^{uv}\Lambda_{uv}^n.$$

В силу (19), (17), (18) каждая из функций (25) образует квазитензор:

$$d\Lambda_v^0 + \Lambda_v^0\omega_0^0 - \Lambda_u^0\omega_v^u + \omega_v^0 = \Lambda_{vK}^0\omega_0^K;\ d\hat{\Lambda}_v^0 + \hat{\Lambda}_v^0\omega_0^0 - \hat{\Lambda}_u^0\omega_v^u + \omega_v^0 = \hat{\Lambda}_{vK}^0\omega_0^K, \tag{26}$$

$$d\Lambda_n^0 + \Lambda_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = \Lambda_{nK}^0\omega_0^K;\ d\hat{\Lambda}_n^0 + \hat{\Lambda}_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = \hat{\Lambda}_{nK}^0\omega_0^K. \tag{27}$$

В силу (20), (26), (27) касательное оснащение базисного распределения $\mathcal{K}$ в первой дифференциальной окрестности внутренним образом определяется полями четырех пар квазитензоров $(\Lambda_v^0, \Lambda_n^0)$, $(\Lambda_v^0, \hat{\Lambda}_n^0)$, $(\hat{\Lambda}_v^0, \Lambda_n^0)$, $(\hat{\Lambda}_v^0, \hat{\Lambda}_n^0)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Различные попарные сочетания нормальных и касательных оснащений базисного распределения $\mathcal{K}$ гиперполосного распределения $\mathcal{F}$ в пространстве конформной связности $C_{n,n}$, определяемые полями квазитензоров Λ_i^0, $\hat{\Lambda}_i^0$ и Λ_v^0, $\hat{\Lambda}_v^0$, Λ_n^0, $\hat{\Lambda}_n^0$, в первой дифференциальной окрестности индуцируют восемь инвариантных полных оснащений базисного распределения $\mathcal{K}$ гиперполосного распределения $\mathcal{F}$.*

Рассмотрим совокупность функций [1]

$$a_{ij}^n \stackrel{def}{=} \Lambda_{ij}^n - \frac{1}{m} g_{ij} g^{ks} \Lambda_{ks}^n . \qquad (28)$$

На распределении $\mathcal{F}$ функции (28) в силу (19) образуют тензор первого порядка:

$$da_{ij}^n + a_{ij}^n(\omega_0^0 + \omega_n^n) - a_{kj}^n \omega_i^k - a_{ik}^n \omega_j^k = a_{ijK}^n \omega_0^K . \qquad (29)$$

В случае невырожденности тензора a_{ij}^n, то есть $a_1 \stackrel{def}{=} \left| a_{ij}^n \right| \neq 0$, рассмотрим обратный ему тензор a_n^{ji}, компоненты которого определяются соотношениями $a_{ik}^n a_n^{kj} = \delta_i^j$.

Продифференцируем последние соотношения и свернем полученные уравнения с тензором a_n^{li}, тогда с использованием (29) имеем

$$da_n^{lj} - a_n^{lj}(\omega_0^0 + \omega_n^n) + a_n^{kj} \omega_k^l + a_n^{lk} \omega_k^j = a_{nK}^{lj} \omega_0^K . \qquad (30)$$

Согласно работе [3] справедливо уравнение $d \ln a_1 = a_n^{ji} da_{ij}^n$; имеем

$$d \ln a_1 + m(\omega_0^0 + \omega_n^n) - 2\omega_j^j = a_K \omega_0^K , \; a_K = a_n^{ji} a_{ijK}^n . \qquad (31)$$

Уравнение (31) в силу (12) запишем в виде: $d \ln \frac{a_1}{g_1} + m(\omega_0^0 + \omega_n^n) = a_K \omega_0^K$, откуда получим

$$d \ln \sqrt[m]{\frac{a_1}{g_1}} + \omega_0^0 + \omega_n^n = \widetilde{a}_K \omega_0^K , \; \widetilde{a}_K = \frac{1}{m} a_K . \qquad (32)$$

Продолжая уравнение (32), с использованием (1), (18) имеем

$$d\widetilde{a}_k + \widetilde{a}_k \omega_0^0 - \widetilde{a}_i \omega_k^i + \omega_k^0 = \widetilde{a}_{kL} \omega_0^L , d\widetilde{a}_\alpha + \widetilde{a}_\alpha \omega_0^0 - \widetilde{a}_\beta \omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^0 = \widetilde{a}_{\alpha L} \omega_0^L ; \qquad (33)$$

здесь

$$\widetilde{a}_k \stackrel{def}{=} \frac{1}{m} a_k , \; \widetilde{a}_\alpha \stackrel{def}{=} \frac{1}{m} a_\alpha ; \qquad (34)$$

$$2\widetilde{a}_{[kl]} - 2\widetilde{a}_\alpha \Lambda_{[kl]}^\alpha - \widetilde{a}_M R_{0kl}^M + R_{0kl}^0 = 0 , \; 2\widetilde{a}_{[\alpha\beta]} - 2\widetilde{a}_j \Lambda_{[\alpha\beta]}^j - \widetilde{a}_M R_{0\alpha\beta}^M + R_{0\alpha\beta}^0 = 0 ,$$

$$\widetilde{a}_{k\beta} - \widetilde{a}_{\beta k} + \widetilde{a}_j \Lambda_{\beta k}^j - \widetilde{a}_\alpha \Lambda_{k\beta}^\alpha + R_{0k\beta}^0 - \widetilde{a}_M R_{0k\beta}^M = 0 . \qquad (35)$$

Согласно (33), (20) поля квазитензоров второго порядка $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{a}_\alpha$ определяют полное оснащение гиперполосного распределения $\mathcal{F}$ в пространстве $C_{n,n}$.

С учетом уравнений (19), (17) совокупность функций

$$b_{uv}^n \stackrel{def}{=} \Lambda_{uv}^n - \frac{1}{n-m-1} g_{uv} g^{wz} \Lambda_{wz}^n$$

при $m<n-2$ образует тензор:

$$db_{uv}^n + b_{uv}^n(\omega_0^0 + \omega_n^n) - b_{wv}^n \omega_u^w - b_{uw}^n \omega_v^w = b_{uvK}^n \omega_0^K ,$$

при $m=n-2$ тензор b_{uv}^n будет нулевой.

В случае невырожденности этого тензора, то есть $b \stackrel{def}{=} \left| b_{uv}^n \right| \neq 0$, имеем

$$d \ln b + (n-m-1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) - 2\omega_u^u = b_K \omega_0^K ;$$

здесь каждая из систем функций

$$\tilde{b}_k \overset{def}{=} \frac{1}{n-m-1} b_k, \ \tilde{b}_\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{n-m-1} b_\alpha \tag{36}$$

по аналогии с (34) образует квазитензор второго порядка:

$$\begin{aligned} d\tilde{b}_k + \tilde{b}_k \omega_0^0 - \tilde{b}_i \omega_k^i + \omega_k^0 = \tilde{b}_{kL} \omega_0^L, \\ d\tilde{b}_\alpha + \tilde{b}_\alpha \omega_0^0 - \tilde{b}_\beta \omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^0 = \tilde{b}_{\alpha L} \omega_0^L; \end{aligned} \tag{37}$$

причем справедливы соотношения:

$$2\tilde{b}_{[kl]} - 2\tilde{b}_\alpha \Lambda_{[kl]}^\alpha - \tilde{b}_M R_{0kl}^M + R_{0kl}^0 = 0, \ 2\tilde{b}_{[\alpha\beta]} - 2\tilde{b}\,\Lambda_{[\alpha\beta]}^j - \tilde{b}_M R_{0\alpha\beta}^M + R_{0\alpha\beta}^0 = 0,$$
$$\tilde{b}_{k\beta} - \tilde{b}_{\beta k} + \tilde{b}_j \Lambda_{\beta k}^j - \tilde{b}_\alpha \Lambda_{k\beta}^\alpha + R_{0k\beta}^0 - \tilde{b}_M R_{0k\beta}^M = 0. \tag{38}$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Инвариантное полное оснащение гиперполосного распределения $\mathcal{F}$, погруженного в пространство конформной связности $C_{n,n}$, во второй дифференциальной окрестности внутренним образом определяется:*

а) полями квазитензоров второго порядка $\tilde{a}_k$ и $\tilde{a}_\alpha$;

б) полями квазитензоров второго порядка $\tilde{b}_k$ и $\tilde{b}_\alpha$ при $m < n-2$.

Резюме. Доказано, что в первой и второй дифференциальных окрестностях инвариантное полное оснащение гиперполосного распределения внутренним образом определяется полями квазитензоров первого порядка (22), (25) и полями квазитензоров второго порядка (34), (36) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акивис, М. А.* Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства / М. А. Акивис // Математический сборник. – М., 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.

2. *Бушманова, Г. В.* Элементы конформной геометрии / Г. В. Бушманова, А. П. Норден. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.

3. *Лаптев, Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г. Ф. Лаптев // Труды Московского математического общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

4. *Остиану, Н. М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия / Н. М. Остиану // Rev. math. pures et appl. (RPR). – 1962. – Т. 7. – № 2. – С. 231–240.

5. *Столяров, А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий / А. В. Столяров. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 1994. – 290 с.

6. *Столяров, А. В.* Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий / А. В. Столяров, Т. Н. Глухова. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2007. – 180 с.

7. *Столяров, А. В.* Пространство конформной связности / А. В. Столяров // Известия вузов. Математика. – 2006. – № 11. – С. 42–54.

8. *Столяров, А. В.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложения / А. В. Столяров. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2002. – 204 с.

9. *Фиников, С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948. – 432 с.