УДК 539.374

О СЖАТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

ON THE COMPRESSION OF SPATIAL LAYER OF IDEALLY PLASTIC MATERIAL AT GENERALIZATION OF THE CONDITION OF PLASTICITY OF MISES IN CASE OF TRANSMISSION ANISOTROPY

А. В. Балашникова

A. V. Balashnikova

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары

Аннотация. В исследуемой работе рассматривается процесс сжатия слоя при трансляционной анизотропии. Изучается вопрос обобщения условия полной пластичности Мизеса.

Abstract. The article considers the process of compression of the layer at transmission anisotropy. The question of generalization of the condition of full plasticity of Mises is studied.

Ключевые слова: *условия пластичности Мизеса, анизотропный материал, уравнения равновесия, формулы Коши.*

Keywords: *conditions of plasticity of Mises, anisotropic material, equations of balance, Cauchy formula.*

Актуальность исследуемой проблемы. Полученные результаты позволяют учитывать влияние трансляционной анизотропии на прессовку анизотропной пространственной металлической заготовки жесткими плитами.

Материал и методика исследований. В работе применяются математические методы исследования и модели, адекватные реальным механическим процессам. Результаты согласуются с исследованиями других авторов.

Результаты исследований и их обсуждение. Рассмотрим процесс сжатия пространственного анизотропного слоя идеальнопластического материала [1].

Запишем обобщенное условие пластичности Мизеса:

$$\begin{gathered}\left[(\sigma_x-\sigma_y)-(k_1-k_2)\right]^2+\left[(\sigma_y-\sigma_z)-(k_2-k_3)\right]^2+\left[(\sigma_z-\sigma_x)-(k_3-k_1)\right]^2+\\+6\left[(\tau_{xy}-k_4)^2+(\tau_{yz}-k_5)^2+(\tau_{xz}-k_6)^2\right]=6k_0^2,\end{gathered}\tag{1}$$

где σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} – компоненты напряжения, k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, $k_6 - const$.

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.\end{aligned}\tag{2}$$

Используя условие пластичности Мизеса при трансляционной анизотропии (1), запишем ассоциированный закон течения:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x=6\lambda\cdot\left(\sigma_x-\sigma-\left(k_1-\bar{k}\right)\right),\\&\varepsilon_y=6\lambda\cdot\left(\sigma_y-\sigma-\left(k_2-\bar{k}\right)\right),\\&\varepsilon_z=6\lambda\cdot\left(\sigma_z-\sigma-\left(k_3-\bar{k}\right)\right),\\&\varepsilon_{xy}=6\lambda\cdot\left(\tau_{xy}-k_4\right),\\&\varepsilon_{yz}=6\lambda\cdot\left(\tau_{yz}-k_5\right),\\&\varepsilon_{xz}=6\lambda\cdot\left(\tau_{xz}-k_6\right),\end{aligned}\tag{3}$$

где ε_x, ε_y, ε_z, ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{xz} – компоненты скорости деформации, $\sigma=\frac{1}{3}\left(\sigma_{\mathrm{x}}+\sigma_{\mathrm{y}}+\sigma_{\mathrm{z}}\right)$, $\bar{k}=\frac{1}{3}\left(\mathrm{k}_1+k_2+k_3\right)$.

Подставим компоненты скорости деформации (3) в условие пластичности (1) и выразим λ:

$$6\lambda=\sqrt{\frac{\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)^2}{6k_0}+\frac{\left(\varepsilon_y-\varepsilon_z\right)^2}{6k_0}+\frac{\left(\varepsilon_z-\varepsilon_x\right)^2}{6k_0}+\frac{1}{k_0}\left(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_{xz}^2\right)}.\tag{4}$$

Из (3) следует условие несжимаемости

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0.\tag{5}$$

Имеют место формулы Коши:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\tag{6}$$

где u, v, w – скорости перемещения.

Соотношения (3) перепишем в виде:

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x}{6\lambda} + \sigma + \left(k_1 - \bar{k}\right),\ \tau_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda} + k_4,$$
$$\sigma_y = \frac{\varepsilon_y}{6\lambda} + \sigma + \left(k_2 - \bar{k}\right),\ \tau_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{6\lambda} + k_5, \tag{7}$$
$$\sigma_z = \frac{\varepsilon_z}{6\lambda} + \sigma + \left(k_3 - \bar{k}\right),\ \tau_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{6\lambda} + k_6.$$

Предположим аналогично идеям Прандтля:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= C_1 z + k_6 + \tilde{C}_1, \\ \tau_{yz} &= C_2 z + k_5 + \tilde{C}_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $C_1, \tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_2 - const.$

Подставив предположение (8) в ассоциированный закон течения (3), получим:

$$\varepsilon_{xz} \cdot \left(C_2 z + \tilde{C}_2\right) = \varepsilon_{yz} \cdot \left(C_1 z + \tilde{C}_1\right). \tag{9}$$

Далее из уравнения равновесия (2) с учетом компонент напряжения (7) и предположения для τ_{xz}, τ_{yz} (8) находим:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + C_1 = 0,\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + C_2 = 0,\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Последнее выражение позволяет выразить девиатор напряжения σ:

$$\sigma_z = C_1 x + C_2 y + C_3,\ \sigma = -C_1 x - C_2 y - C_3 - \frac{\varepsilon_z}{6\lambda},\ C_3 - const. \tag{11}$$

Условие несжимаемости (5) согласно формулам Коши (6) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Сделаем предположение для компонент скорости перемещения:

$$\begin{aligned} u &= m_1 x + n_1 y + \varphi_1(z), \\ v &= m_2 x + n_2 y + \varphi_2(z), \\ w &= m_3 x + n_3 y + qz, \end{aligned} \tag{13}$$

где $m_i, n_i, q, a - const$.

Согласно формулам Коши (6), условиям несжимаемости (12) и предположениям для скорости перемещения (13) будем иметь:

$$\varepsilon_x = m_1, \varepsilon_y = n_2, \varepsilon_z = q, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\cdot(n_1 + m_2), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\cdot\left(n_3 + \frac{d\varphi_2}{dz}\right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\cdot\left(m_3 + \frac{d\varphi_1}{dz}\right),$$
$$6\lambda = \sqrt{\frac{(m_1 - n_2)^2}{6} + \frac{(n_1 - q)^2}{6} + \frac{(q - m_1)^2}{6} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2}. \tag{14}$$

Найденное значение девиатора напряжения (11), преобразованные формулы Коши (14) подставим в соотношения для компонент напряжений (7):

$$\sigma_x = C_1 x + C_2 y + C_3 + \frac{m_1 - q}{6\lambda} + (k_3 - k_1),$$
$$\sigma_y = C_1 x + C_2 y + C_3 + \frac{n_2 - q}{6\lambda} + (k_2 - k_3), \qquad (15)$$
$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n_1 + m_2}{6\lambda} + k_4.$$

Используем формулу (4) для нахождения λ. Подставляем в нее предположение Прандтля (8) и компоненты напряжения (15):

$$\frac{1}{6\lambda} = A \cdot \sqrt{1 - \left(C_1^2 + C_2^2\right) z^2}, \; A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(m_1 - n_2)^2 + (n_1 - q)^2 + (m_1 - q)^2 + 3(n_1 + m_2)^2}}. \qquad (16)$$

Обозначим толщину слоя $2h$, предположим, что в некоторой точке $x_0 y_0$ определено осредненное давление

$$p = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \sigma dz, p - const. \qquad (17)$$

Соотношение (16) для определения λ подставим в формулу (17) и найдем неизвестную константу C_3:

$$C_3 = p + C_1 x_0 + C_2 y_0 + \frac{q}{2h} \int_{-h}^{h} \frac{dz}{6\lambda} =$$
$$= p + C_1 x_0 + C_2 y_0 + \frac{qA}{2h} \left[\sqrt{1 - \left(C_1^2 + C_2^2\right) h^2} + \frac{1}{C_1^2 + C_2^2} \arcsin\left(h \cdot \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \right) \right]. \qquad (18)$$

Таким образом, нашли константу C_3 для скоростей напряжения, которая зависит от величин C_1, C_2. Показали, что и для обобщенного условия пластичности Мизеса при трансляционной анизотропии могут быть определены компоненты напряжений и скоростей деформации.

Резюме. Решена задача о сжатии пространственного идеальнопластического слоя при обобщении условия пластичности Мизеса в случае трансляционной анизотропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балашникова, А. В.* О сжатии пространственного идеальнопластического слоя при трансляционной анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / А. В. Балашникова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 56–59.