

УДК 539.374

**О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ СЛОЯ
ИЗ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА
ПРИ УСЛОВИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ**

**ON THE LIMIT CONDITION OF PERFECTLY PLASTIC LAYER
ON CONDITION OF TRANSMISSION ANISOTROPY**

А. В. Балашникова

A. V. Balashnikova

*ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары*

Аннотация. В рассматриваемой работе изучается предельное состояние слоя из анизотропного идеальнопластического материала, сжатого жесткими параллельными плитами.

Abstract. The article considers the limit condition of anisotropic perfectly plastic layer squeezed by rigid parallel plates.

Ключевые слова: *трансляционная анизотропия, полная пластичность, предельное состояние, предел текучести.*

Keywords: *transmission anisotropy, full plasticity, limit condition, fluidity limit.*

Актуальность исследуемой проблемы. При изучении свойств анизотропии могут быть применимы результаты данной работы. Связь разных значений предельного сопротивления при производстве изделий позволяет снизить энергетические затраты.

Материал и методика исследований. В ходе исследования применялись методы математического анализа и апробированные модели механического поведения тел.

Результаты исследований и их обсуждение. Рассмотрим полную пластичность при использовании статически определенных условий предельного состояния при трансляционной анизотропии [1].

Запишем обобщенный вид условия полной пластичности:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \kappa n_1^2 + k_1 - \bar{k}, \quad \tau_{xy} = \kappa n_1 n_2 + k_4, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \kappa n_2^2 + k_2 - \bar{k}, \quad \tau_{yz} = \kappa n_2 n_3 + k_5, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \kappa n_3^2 + k_3 - \bar{k}, \quad \tau_{xz} = \kappa n_1 n_3 + k_6, \\ \bar{k} &= \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3), \quad \kappa - const.\end{aligned}\tag{1}$$

После преобразования соотношение (1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xy} - k_4)(\tau_{xz} - k_6)}{(\tau_{yz} - k_5)} + k'_1, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} + k'_2, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)} + k'_3,\end{aligned}\tag{2}$$

где $k'_i = k_i - \bar{k}$.

Из соотношения (2) выразим предел текучести κ , используя выражение для дивергента напряжения $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$:

$$\frac{(\tau_{xy} - k_4)(\tau_{xz} - k_6)}{(\tau_{yz} - k_5)} + \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} + \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)} = \kappa.\tag{3}$$

Аналогично идеям Прандтля предположим:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= a_1 z + a_2 + k_6, \\ \tau_{yz} &= b_1 z + b_2 + k_5,\end{aligned}\tag{4}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2 - const$.

Подставляя предположение (4) в (3), определяем τ_{xy} :

$$(\tau_{xy} - k_4) = \frac{(a_1 z + a_2)(b_1 z + b_2) \left(\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 4z^2 \left((a_1 z + a_2)^2 + (b_1 z + b_2)^2 \right)} \right)}{2 \left((a_1 z + a_2)^2 + (b_1 z + b_2)^2 \right)}.\tag{5}$$

Используя полученные результаты предела текучести (3) и компоненты напряжения (5), из условия полной пластичности (2) находим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xy} - k_4)(a_1z + a_2)}{(b_1z + b_2)} + k'_1, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(\tau_{xy} - k_4)(b_1z + b_2)}{(a_1z + a_2)} + k'_2, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}\kappa + \frac{(a_1z + a_2)(b_1z + b_2)}{(\tau_{xy} - k_4)} + k'_3.\end{aligned}\quad (6)$$

Подставим в уравнение равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ предположение (4), выражение для τ_{xy} (5) и преобразованное условие полной пластичности (6). Это позволяет найти девиатор напряжения σ :

$$\sigma = -a_1x - b_1y + C + \frac{1}{3}\kappa - \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)}, \quad C - const. \quad (7)$$

Заменим σ в условии полной пластичности (6) полученным выражением (7):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -a_1x - b_1y + C - \frac{(\tau_{xy} - k_4)(a_1z + a_2)}{(b_1z + b_2)} - \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)}, \\ \sigma_y &= -a_1x - b_1y + C - \frac{(\tau_{xy} - k_4)(b_1z + b_2)}{(a_1z + a_2)} - \frac{(\tau_{xz} - k_6)(\tau_{yz} - k_5)}{(\tau_{xy} - k_4)}, \\ \sigma_z &= -a_1x - b_1y + C.\end{aligned}\quad (8)$$

Рассмотрим слой толщиной $2h$ (рис. 1). Отнесем все величины к безразмерным.

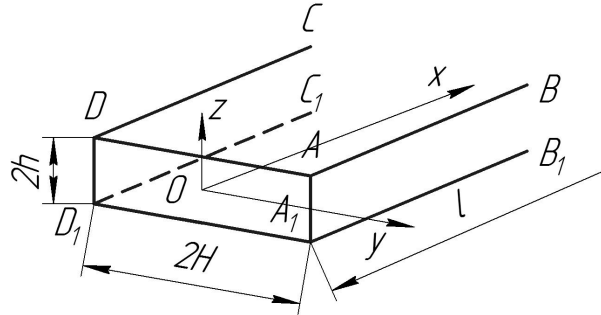


Рис. 1

На нижней и верхней сторонах слоя согласно идеям Прандтля (4) имеем:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^+ &= a_1 + a_2 + k_6, \quad \tau_{yz}^+ = b_1 + b_2 + k_5, \quad z = 1, \\ \tau_{xz}^- &= -a_1 + a_2 + k_6, \quad \tau_{yz}^- = -b_1 + b_2 + k_5, \quad z = -1.\end{aligned}\quad (9)$$

Векторы касательных напряжений на нижней и верхней сторонах слоя имеют вид:

$$\vec{T}_1 = \tau_{xz}^+ \vec{i} + \tau_{yz}^+ \vec{j}, \quad \vec{T}_2 = \tau_{xz}^- \vec{i} + \tau_{yz}^- \vec{j}. \quad (10)$$

Величины результирующих касательных напряжений на нижней и верхней сторонах слоя, исходя из (9), (10), рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\tau_{xz}^{+2} + \tau_{yz}^{+2}} = \sqrt{(a_1 + a_2 + k_6)^2 + (b_1 + b_2 + k_5)^2} = \kappa_1, \\ T_2 &= \sqrt{\tau_{xz}^{-2} + \tau_{yz}^{-2}} = \sqrt{(-a_1 + a_2 + k_6)^2 + (-b_1 + b_2 + k_5)^2} = \kappa_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\kappa_1, \kappa_2 \leq 1$.

Найдем угол между векторами \vec{T}_1, \vec{T}_2 :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2}{|\vec{T}_1| |\vec{T}_2|} = \frac{k_5^2 + k_6^2 + a_2^2 + b_2^2 - (a_1^2 + b_1^2)}{\kappa_1 \cdot \kappa_2}. \quad (12)$$

Пусть на нижней и верхней сторонах плиты достигаются предельные значения касательных напряжений $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Пусть вектор \vec{T}_1 направлен вдоль оси x :

$$\vec{T}_1 = (a_1 + a_2 + k_6) \vec{i}, \quad a_1 + a_2 + k_6 = 1, \quad b_1 = 0. \quad (13)$$

Вектор \vec{T}_2 примет вид:

$$\vec{T}_2 = (-a_1 + a_2 + k_6) \vec{i} + (-b_1 + b_2 + k_5) \vec{j}, \quad T_2 = 1. \quad (14)$$

Из (13)–(14) выразим:

$$b_1^2 = a_1 \cdot (1 - a_1). \quad (15)$$

В рассматриваемом случае с учетом (13)–(15) имеем:

$$a_1 = \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad b_1 = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \mu_1 = 0, \quad \varphi = -\mu_2. \quad (16)$$

Тогда из (8), принимая во внимание (16), получаем:

$$\sigma_z = -\cos \frac{\varphi}{2} \left(x \cdot \cos \frac{\varphi}{2} + y \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right) + C. \quad (17)$$

Переходя к переменным

$$\xi = x \cdot \cos \frac{\varphi}{2} + y \cdot \sin \frac{\varphi}{2}, \eta = -x \cdot \sin \frac{\varphi}{2} + y \cdot \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (18)$$

согласно (17), (18) будем иметь:

$$\sigma_z = -\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \xi + C.$$

Таким образом, последнее подтверждает, что возрастание давления σ_y происходит по линейному закону вдоль биссектрисы угла между направлениями T_1, T_2 . В частных случаях из последнего получаем варианты:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\xi + C, \text{ при } \varphi = 0; \\ \sigma_z &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \xi + C, \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Для нахождения константы C , которая входит в соотношение (8), используем допущение, что край плиты $z=0$ свободен от усилий. Предположим среднее значение нормального напряжения σ_z по толщине слоя равным нулю:

$$\int_{-1}^1 \sigma_z dz = 0. \quad (19)$$

Тогда из соотношений (17), принимая во внимание (21), получаем:

$$2C = \int_{-1}^1 \left[\frac{(\tau_{xy} - k_4)(\tau_{xz} - k_6)}{(\tau_{yz} - k_5)} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{(\tau_{yz} - k_5)(\tau_{xy} - k_4)}{(\tau_{xz} - k_6)} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (\tau_{xy} - k_4) \sin \varphi \right] dz. \quad (20)$$

Таким образом, показали, что при условии полной пластичности так же можно определить компоненты напряжений из условий (4)–(6).

Резюме. Решена задача о предельном состоянии слоя из анизотропного идеально-пластического материала, который сжимается параллельными плитами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балашикова, А. В. О предельном состоянии пространственного слоя из идеальнопластического материала при трансляционной анизотропии, сжатого параллельными шероховатыми плитами / А. В. Балашикова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 2 (12). – С. 39–44.