УДК 37.013.75

О МЕТОДИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

ON METHODOLOGICAL PECULIARITIES OF SOLVING PROBLEMS ON GENERATION OF EQUATIONS

Н. И. Попов

N. I. Popov

ФГБОУ ВПО «Марийский государственный университет», г. Йошкар-Ола

Аннотация. Задачи на составление уравнений представляют собой традиционный раздел элементарной математики, их решение способствует развитию логического мышления и умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования, формированию навыков моделирования реальных объектов и явлений, повышает вычислительную математическую культуру. Выработка умений и навыков по решению текстовых алгебраических задач непосредственно приводит к практическому применению теоретических знаний. В статье отражены авторский подход к использованию специальных средств обучения и методические особенности решения отдельных типов задач на составление уравнений.

Abstract. The problems on generation of equations represent the traditional section of elementary mathematics, the solution of which promotes logical thinking and the ability to independently carry out small studies, formation of skills of modeling real objects and phenomena, enhances the computational mathematical culture. The development of skills on solving text algebraic problems directly leads to the practical application of theoretical knowledge. The article reflects the author's approach to using specific means of education and methodical features of solving some tasks on generation of equations.

Ключевые слова: *обучение математике, задачи на составление уравнений.*

Keywords: *teaching mathematics, problem on generation of equations.*

Актуальность исследуемой проблемы. Наступивший XXI век ознаменован радикальным переосмыслением самых разных социальных, общественных, культурных и других аспектов нашего бытия. В частности, мы стали свидетелями зарождения новой парадигмы образования, формирования новых педагогических концепций и появления новых информационно-коммуникационных технологий обучения. Поэтому естественным образом возникает вопрос: какими должны быть послезавтра программа курса математики общеобразовательной школы и методика его преподавания, чтобы в полной мере соответствовать вызовам времени и общества? [5, 11]. Изменения в содержании программы курса математики средней школы требуют радикального пересмотра системы подготовки учителей. Кроме того, должна вестись работа над учебниками, задачниками и учебными пособиями.

Проблеме анализа ведущих концепций образования, теории, методов и моделей обучения и воспитания в научно-методической литературе посвящено немало работ [1],

[2], [4], [6], [7] и др. При профессиональной подготовке математиков в условиях фундаментализации университетского образования необходим комплексный подход с применением психолого-педагогических теорий и дидактических принципов обучения, информационных технологий и методик преподавания математических дисциплин. Обучение студентов решению математических задач, а также исследование математических моделей профессиональных задач должны осуществляться поэтапно, чтобы задания были понятны обучаемым, а их выполнение было осмысленным [4, 89].

Несомненно, актуальность исследуемой проблемы связана с тем, что текстовые алгебраические задачи изучаются не только в общеобразовательной школе, но и на разных математических направлениях подготовки в рамках первой ступени образования в вузе.

Материал и методика исследований. В учебном пособии «Задачи на составление уравнений» [3] предложен вариант обучающей технологии на основе материала по текстовым алгебраическим задачам. Разработана методическая схема (необходимая теория, типовые методики, задачи для самостоятельного решения с ответами), которая позволила эффективно структурировать рассматриваемый материал по параграфам. При этом выделены характерные особенности и специфика методов решения с подробным разбором каждого типа задач.

Во второй части книги [3] предпринята попытка выработки единого подхода к нестандартным задачам и к заданиям, допускающим пересечение обоих циклов задач, т. е. стандартных и нестандартных:

– задачи, в которых больше неизвестных, чем уравнений, получаемых при решении;

– задачи, которые решаются при помощи неравенств;

– задачи с целочисленными решениями;

– задачи на «сплавы», «смеси» и «концентрации»;

– задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений некоторых величин;

– задачи с альтернативным условием.

Такой подход позволяет говорить не об отдельных, исключительных способах, а о методике решения упомянутых задач. Это дает возможность, с одной стороны, по-новому взглянуть на текстовые алгебраические задачи, а с другой – высветить особенности методики их решения, что проиллюстрируем в дальнейшем.

Результаты исследований и их обсуждение. Для проведения практических занятий со школьниками и студентами в качестве средств обучения решению текстовых алгебраических задач помимо учебного пособия автором разработаны специальные конспект-схемы, карточки-инструкции, блок-схемы. Они играют значимую роль в оказании методической помощи учащимся и достаточно эффективны при применении объяснительно-иллюстративного, частично-поискового и репродуктивного методов обучения. Приведем пример краткой инструкции, полезной при решении задач на «сложные проценты», и проиллюстрируем ее использование при выполнении задания.

Карточка-инструкция

S_0 *– исходное значение некоторой величины* S, S_n *– значение величины* S *после* n*-го этапа,* p *– процентное изменение* S *в конце этапа.*

1. $S_n = S_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$ *($p>0$ – возрастание, $p<0$ – убывание, в конце каждого этапа величина S изменяется на одно и то же постоянное число процентов).*

2. $S_n = S_0\cdot\left(1+\dfrac{p_1}{100}\right)\left(1+\dfrac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1+\dfrac{p_n}{100}\right)$ *($p_k(k=1,2,3,\ldots)$ – процентное изменение S на k-м этапе; изменение величины S на каждом этапе осуществляется на разное число процентов).*

3. $S_0\left(1+\dfrac{p_1}{100}\right)\left(1+\dfrac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1+\dfrac{p_n}{100}\right)=S_0\left(1+\dfrac{m}{100}\right)^n$ *или*

$\dfrac{m}{100}=\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{p_1}{100}\right)\left(1+\dfrac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1+\dfrac{p_n}{100}\right)}-1$, *где m – средний процент прироста, n – число этапов.*

ЗАДАЧА 1. В начале года $1/6$ часть суммы денег вложили в Марпромбанк, а оставшуюся часть – в банк «Аяр». К концу первого года сумма вкладов стала равной 115 тыс. рублей, а к концу второго года – 445 тыс. рублей. Если бы сначала $1/6$ часть суммы вложили в «Аяр», а остальные деньги – в Марпромбанк, то по истечении одного года получили бы 95 тыс. рублей. Определить величину вклада через два года, если бы исходная сумма денег была целиком вложена в банк «Аяр».

РЕШЕНИЕ. Обозначим через S исходную сумму денег, а через p_1 и p_2 соответственно – годовые проценты банка «Аяр» и Марпромбанка. Исходя из условий задачи и опираясь на карточку-инструкцию, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{5}{6}S\left(1+\dfrac{p_1}{100}\right)+\dfrac{1}{6}S\left(1+\dfrac{p_2}{100}\right)=115000,\\ \dfrac{5}{6}S\left(1+\dfrac{p_1}{100}\right)^2+\dfrac{1}{6}S\left(1+\dfrac{p_2}{100}\right)^2=445000,\\ \dfrac{1}{6}S\left(1+\dfrac{p_1}{100}\right)+\dfrac{5}{6}S\left(1+\dfrac{p_2}{100}\right)=95000.\end{cases}$$

Решение системы позволяет определить искомую величину вклада

$$S\cdot\left(1+\dfrac{p_1}{100}\right)^2=480000.$$

В некоторых случаях приходится решать алгебраические задачи, в которых больше неизвестных, чем уравнений, получаемых при решении. Если выбирать неизвестные для составления уравнений, руководствуясь тем, чтобы получить наиболее удобное и простое математическое оформление условий задачи, то та величина, которую необходимо найти, может и не войти в их число. Как правило, эта величина представляется некоторой комбинацией введенных неизвестных. Поэтому может случиться так, что однозначное определение всех неизвестных из системы уравнений невозможно, однако искомая комбинация этих неизвестных, тем не менее, находится однозначно.

Рассмотрим задание, иллюстрирующее отмеченную особенность указанного класса задач на составление уравнений.

ЗАДАЧА 2. В экзаменационной комиссии 5 преподавателей. 1, 2 и 4-й преподаватели вместе могут проверить все письменные работы за 20 часов; 2, 3 и 5-й – за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме 2-го, то на проверку работ потребуется всего 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всей комиссией по сравнению с проверкой работ только 2-м преподавателем?

РЕШЕНИЕ. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 соответственно производительность труда каждого из пяти преподавателей, а через V – общее количество проверяемых работ. Из условий задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = \dfrac{V}{20}, \\ x_2 + x_3 + x_5 = \dfrac{V}{15}, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = \dfrac{V}{10}. \end{cases}$$

То, что требуется найти в задании, можно записать в виде отношения

$$\frac{V}{x_2} : \frac{V}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{x_2}.$$

Сложив соответствующие части уравнений системы, имеем

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \frac{13V}{60} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{13V}{120}.$$

Теперь, вычитая из последнего уравнения почленно третье уравнение системы, получаем $x_2 = \dfrac{V}{120}$. Тогда искомое отношение

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{x_2} = \frac{13V}{120} : \frac{V}{120} = 13.$$

В случае, когда количество неизвестных в системе больше числа уравнений, система, конечно, может иметь бесконечное множество решений.

Некоторые задачи приводят к одному уравнению с двумя и более неизвестными.

ЗАДАЧА 3. Трое рабочих копали канаву. Сначала первый рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим рабочим для того, чтобы вырыть всю канаву; затем второй рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву и, наконец, третий рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если бы с самого начала работали все трое рабочих одновременно?

РЕШЕНИЕ. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 соответственно производительность труда первого, второго и третьего рабочих, а весь объем работы примем за 1. Тогда из условий задачи получаем уравнение

$$x_1 \cdot \frac{1}{2(x_2+x_3)} + x_2 \cdot \frac{1}{2(x_1+x_3)} + x_3 \cdot \frac{1}{2(x_1+x_2)} = 1. \qquad (1)$$

Исходя из постановки задачи, требуется найти значение отношения

$$\frac{\dfrac{1}{2(x_2+x_3)} + \dfrac{1}{2(x_1+x_3)} + \dfrac{1}{2(x_1+x_2)}}{\dfrac{1}{x_1+x_2+x_3}}.$$

Представим каждое слагаемое, входящее в левую часть уравнения (1), в виде разности

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{2(x_2+x_3)} - \frac{x_2+x_3}{2(x_2+x_3)} + \frac{x_1+x_2+x_3}{2(x_1+x_3)} - \frac{x_1+x_3}{2(x_1+x_3)} + \frac{x_1+x_2+x_3}{2(x_1+x_2)} - \frac{x_1+x_2}{2(x_1+x_2)} = 1,$$

отсюда имеем

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2(x_2+x_3)} + \frac{1}{2(x_1+x_3)} + \frac{1}{2(x_1+x_2)} \right) - \frac{3}{2} = 1.$$

Тогда значение искомого отношения

$$\frac{\dfrac{1}{2(x_2+x_3)} + \dfrac{1}{2(x_1+x_3)} + \dfrac{1}{2(x_1+x_2)}}{\dfrac{1}{x_1+x_2+x_3}} = \frac{5}{2}.$$

При решении задач на «работу» в случае, когда в ее выполнении участвуют два производителя и объем работы неизвестен, удобно воспользоваться следующей схемой для реализации двух возможных подходов в выполнении заданий.

Конспект-схема

1 – вся работа

x, y – производительность труда *x + y – совместная производительность труда* *1/x, 1/y – время выполнения работы (первого и второго)* *1/(x + y) – время совместной работы*	*x, y – время выполнения работы (первого и второго)* *1/x, 1/y – производительность труда* *1/x +1/y – совместная производительность труда* *1/(1/x +1/y) – время совместной работы*

Обратимся теперь к задачам, которые можно объединить в одну группу из-за того, что их решение связано с выявлением общей закономерности изменения той или иной величины в результате многократно повторяющейся операции.

Пусть, например, резервуар, объем которого V_0 л, содержит p-процентный раствор соли. Из резервуара выливается a л смеси и доливается a л воды, после чего раствор перемешивается. Эта процедура повторяется n раз. Найдем значение концентрации соли в резервуаре после n процедур.

Первоначальное количество соли в растворе равно $\frac{p}{100}\cdot V_0$. После выливания a л смеси в растворе останется $\frac{p}{100}\cdot V_0-\frac{p}{100}\cdot a=\frac{p}{100}V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)$ соли, а ее концентрация после добавления a л воды станет равной

$$C_1=\frac{\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)}{V_0}=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right).$$

После выливания a л смеси (но уже с концентрацией C_1), в растворе останется

$$\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)-C_1\cdot a=\frac{p}{100}V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2$$

соли, а ее концентрация после добавления a л воды станет равной

$$C_2=\frac{\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2}{V_0}=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что концентрация соли в растворе после n переливаний определяется равенством

$$C_n=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n, \tag{2}$$

представляющим собой формулу для убывающей геометрической прогрессии. Множитель $\left(1-\frac{a}{V_0}\right)$, являющийся знаменателем этой прогрессии, показывает, во сколько раз убывает концентрация после очередного переливания. Формула (2) тесно связана с известным правилом начисления «сложных процентов» [4, 11–13]. Приведем также обобщение формулы (2) на случай, когда каждый раз в резервуар доливается не вода, а раствор той же соли с постоянной концентрацией $\frac{q}{100}$. Эта формула имеет вид

$$C_n=\frac{p}{100}+\frac{p-q}{100}\left[\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n-1\right]. \tag{3}$$

Нетрудно заметить, что при $q=0$ равенство (3) переходит в (2).

ЗАДАЧА 4. В каждом из двух резервуаров находится по V_0 л серной кислоты одинаковой концентрации. Из первого резервуара отлили 3 л раствора и долили 3 л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Из второго резервуара отлили 6 л раствора и долили 6 л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Известно, что концентрация кислоты в первом резервуаре оказалась в $9/4$ раза больше, чем концентрация кислоты во втором резервуаре. Какую часть от объема резервуара составляют 3 л?

РЕШЕНИЕ. Исходя из условий задачи, с использованием формулы (2) имеем

$$\frac{p}{100}\left(1-\frac{3}{V_0}\right)^2=\frac{9}{4}\cdot\frac{p}{100}\left(1-\frac{6}{V_0}\right)^2 \quad \text{или} \quad \left(1-\frac{3}{V_0}\right)^2=\frac{9}{4}\left(1-2\cdot\frac{3}{V_0}\right)^2.$$

Последнее равенство запишется в виде

$$\left|1-\frac{3}{V_0}\right|=\frac{3}{2}\left|1-2\cdot\frac{3}{V_0}\right|.$$

Отсюда найдем отношение $\frac{3}{V_0}$. Поскольку $\frac{3}{V_0}<1$ и $2\cdot\frac{3}{V_0}<1$, то $1-\frac{3}{V_0}=\frac{3}{2}\left(1-2\cdot\frac{3}{V_0}\right)$ и, следовательно, искомое значение $\frac{3}{V_0}=\frac{1}{4}$.

С точки зрения методики обучения при решении задач на «сплавы», «смеси» и «концентрации» достаточно удобными и эффективными оказываются блок-схемы.

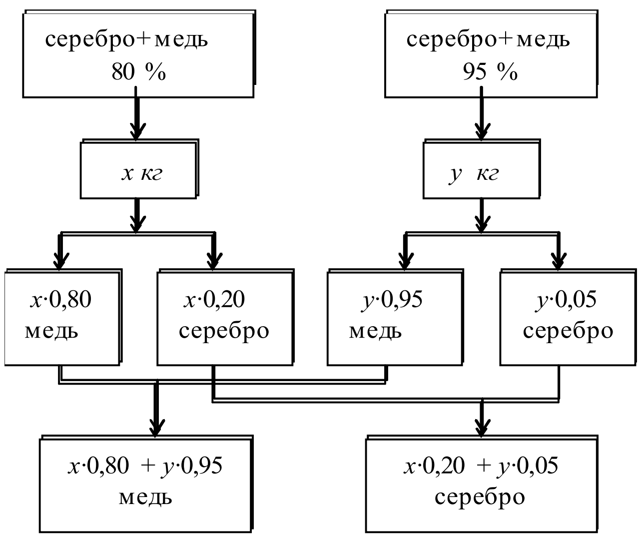

Рис. 1. Блок-схема решения задачи на «сплавы»

ЗАДАЧА 5. Имеются два куска сплава серебра с медью, один из них содержит 80 % меди, другой – 95 %. В каком отношении нужно взять сплавы от обоих кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий 90 % меди?

РЕШЕНИЕ. Пусть масса первого сплава равна x *кг*, а второго – y *кг*. Концентрация меди в первом сплаве 0,80; во втором сплаве – 0,95. По условию задачи эта концентрация должна равняться 0,90. Опираясь на схему из рисунка 1, получаем уравнение $\frac{x\cdot 0{,}80+y\cdot 0{,}95}{x+y}=0{,}90$; откуда $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$. Концентрация получающегося сплава определяется не массой взятых кусков, а отношением этих масс. Поэтому нужно взять 1 часть сплава, содержащего 80 % меди, и 2 части сплава, содержащего 95 % меди.

Резюме. Раздел элементарной математики «Задачи на составление уравнений» по праву относят к числу непростых как для преподавания, так и для изучения. Поэтому с этой точки зрения очень важная роль отводится методике и средствам обучения. Решение задач указанного раздела способствует развитию логического мышления, сообразительности и наблюдательности, умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования. Кроме того, условия текстовых задач возникают не абстрактно, а, как правило, тесно связаны с реальными жизненными ситуациями. Следовательно, выработка умений и навыков по решению задач на составление уравнений непосредственно приводит к практическому использованию теоретических знаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Загвязинский, В. И.* Теория обучения и воспитания : учебник для бакалавров / В. И. Загвязинский, И. Н. Емельянова. – М. : Юрайт, 2012. – 314 с.

2. *Марасанов, А. Н.* О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений / А. Н. Марасанов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. – 2010. – Т. 2. – № 3 (67). – С. 127–134.

3. *Попов, Н. И.* Задачи на составление уравнений : учебное пособие / Н. И. Попов, А. Н. Марасанов. – Йошкар-Ола : Мар. гос. ун-т, 2003. – 109 с.

4. *Попов, Н. И.* Теоретико-методологические основы обучения решению текстовых алгебраических задач / Н. И. Попов // Образование и наука. Известия Уральского отделения Российской академии образования. – 2009. – № 3 (60). – С. 88–96.

5. *Розов, Н. Х.* Курс математики общеобразовательной школы: сегодня и послезавтра / Н. Х. Розов // Математика. Образование : материалы XV Международной конференции. – Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2007. – С. 11–17.

6. *Усова, А. В.* Теоретико-методологические основы построения новой системы естественно-научного образования / А. В. Усова, М. Д. Даммер, С. М. Похлебаев, М. Ж. Симонова. – Челябинск : Изд-во ЧГПУ, 2000. – 100 с.

7. *Яников, А. В.* Роль моделей в обучении математике / А. В. Яников // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. – 2007. – № 4 (56). – С. 11–14.