УДК 517.928.4

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ ГОЛОМОРФНОСТИ

APPROXIMATE SOLUTION FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER IN THE REGION OF HOLOMORPHY

В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева

V. N. Orlov, T. Y. Leontyeva

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с подвижными особыми точками. Дано доказательство теоремы существования и единственности решения этого уравнения в области голоморфности, построено приближенное решение в случае точного значения начальных условий.

Abstract. The article considers the nonlinear differential equation of the second order with movable special points. The proof of the theorem of existence and uniqueness of the solution for this equation in the region of holomorphy is given and the approximate solution in case of exact value of entry conditions is made.

Ключевые слова: *подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, приближенное решение, область голоморфности*.

Keywords: *movable special point, nonlinear differential equation of the second order, approximate solution, region of holomorphy*.

Актуальность исследуемой проблемы. Уравнения, содержащие неизвестные функции и их производные в степени выше первой, называются нелинейными. В последние годы они привлекают все большее внимание. Например, уравнения физических явлений обычно линейны лишь в первом приближении; дальнейшее и более точное исследование, как правило, требует использования нелинейных уравнений. Решения нелинейных уравнений связаны с большими трудностями, вызванными наличием подвижных особых точек у интегралов этих уравнений, которые и являются препятствием к использованию известных на данный момент приближенных методов решения.

Материал и методика исследований. В данной работе используется метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, предложенный в работах [2] и [3], который в целом состоит из шести этапов. В статье [4] был рассмотрен первый шаг вышеуказанного метода, который упоминается и в работах [1], [5].

Результаты исследований и их обсуждение. Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с полиномиальной правой частью пятой степени в комплексной области:

$$y''(z) = b_0(z)y^5(z) + b_1(z)y^4(z) + b_2(z)y^3(z) + b_3(z)y^2(z) + b_4(z)y(z) + b_5(z), \qquad (1)$$

где $b_i, i = 0,1,...,5$ – голоморфные функции в рассматриваемой области.

С помощью замены переменной

$$y(z) = \frac{u(z)}{\sqrt[4]{b_0(z)}} - \frac{b_1(z)}{5b_0(z)} \qquad (2)$$

при выполнении условий

$$\frac{b_1(z)}{5b_0(z)} = \frac{b_2(z)}{2b_1(z)} = \frac{b_3(z)}{b_2(z)} = \frac{2\left(b_4(z) + \frac{b_0''(z)}{4b_0(z)} - \frac{5}{16}\left(\frac{b_0''(z)}{b_0(z)}\right)^2\right)}{b_3(z)} \qquad (3)$$

уравнение (1) приводится к нормальной форме [5]:

$$u''(z) = u^5(z) + r(z) \qquad (4)$$

где

$$r(z) = -\frac{b_1^5(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5^5 b_0^4(z)} - \frac{3b_0''(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{20b_0^2(z)} + \frac{b_1''(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0(z)} - \frac{2b_0'(z)b_1'(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0^2(z)} +$$

$$+ b_5(z)\sqrt[4]{b_0(z)} + \frac{2\left(b_0'(z)\right)^2 b_1(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0^3(z)} - \frac{\left(b_0''(z)\right)^2 b_1(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{16b_0^3(z)} + \frac{b_0'(z)}{2b_0(z)}u'(z) \qquad (5)$$

в каждой области, в которой $b_0(z) \neq 0$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \qquad (6)$$

$$y(z_0) = y_0, y'(z_0) = y_1. \qquad (7)$$

Используя идею, предложенную в работах [2], [3], докажем теорему 1.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $r(z) \in C^1$ *в области*

$$|z - z_0| < \rho_0, \qquad (8)$$

где $\rho_0 = const$;

2. $\exists M_0 : \frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq M_0$, *где* $M_0 = const$, $n = 0,1,2,...$.

Тогда решение задачи (6)-(7) является голоморфной функцией

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad (9)$$

в области

$$|z - z_0| < \rho, \qquad (10)$$

где

$$\rho = \min\left\{\rho_0, \frac{1}{2^2(M+1)^4}\right\},\ M = \max\left\{|y_0|, \sup_n \frac{\left|r^{(n)}(z_0)\right|}{n!}\right\},\ n = 0,1,2,\ldots.$$

Доказательство. По условию теоремы имеем

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n . \qquad (11)$$

Подставив выражения (9) и (11) в уравнение (6), получим

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n\right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n\right)^5 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n .$$

После выполнения соответствующих операций получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1)(z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{**} + A_n)(z - z_0)^n , \qquad (12)$$

где $D_n^{**} = \sum_{i=0}^{n} D_{n-i}^{*} C_i$, $D_n^{*} = \sum_{i=0}^{n} D_{n-i} D_i$, $D_n = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i} C_i$, $n = 0,1,2,\ldots.$

Равенство (12) обратится в тождество при условии, что

$$n(n-1)C_n = D_{n-2}^{**} + A_{n-2},\ n = 2,3,\ldots. \qquad (13)$$

Данное соотношение позволяет однозначно определить все коэффициенты C_n.

Таким образом, получено формальное представление решения задачи (6)-(7) в некоторой окрестности точки z_0 в виде (9), единственность которого следует из однозначности определения C_n.

Покажем сходимость полученного ряда в области (10). Положим

$$M = \max\left\{|y_0|, \sup_n \frac{\left|r^{(n)}(z_0)\right|}{n!}\right\},\ n = 0,1,2,\ldots, \qquad (14)$$

что возможно в силу п. 2 данной теоремы. Тогда из выражения (13) с учетом (14) получаем оценку для коэффициентов C_n:

$$|C_n| \le \frac{1}{n(n-1)} 2^{2n} M (M+1)^{4n},\ n = 2,3,\ldots. \qquad (15)$$

С помощью метода математической индукции докажем эту оценку в случае $n+1 = 2k+1$:

$$2k(2k+1)C_{2k+1} = D_{2k-1}^{**} + A_{2k-1} = \sum_{i=0}^{2k-1} D_{2k-1-i}^{*} C_i + A_{2k-1} = \sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{2k-1-i} D_{2k-1-i-j} D_j\right) C_i + A_{2k-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{2k-1-i}\left(\sum_{m=0}^{2k-1-i-j} C_{2k-1-i-j-m} C_m\right)\left(\sum_{l=0}^{j} C_{j-l} C_l\right)\right) C_i + A_{2k-1},$$

откуда с учетом оценки (15) следует, что

$$\left|C_{2k+1}\right| \le \frac{1}{2k(2k+1)}\sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{2k-1-i}\left(\sum_{m=0}^{2k-1-i-j}\frac{2^{2(2k-1-i-j-m)}M^2(M+1)^{4(2k-1-i-j-m)}}{(2k-i-j-m-1)(2k-i-j-m-2)}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{j}\frac{2^{2(j-l)}M^2(M+1)^{4(j-l)}}{(j-l)^*((j-l)^*-1)}\right)\Bigg)\cdot\frac{2^{2i}M(M+1)^{4i}}{i^*(i^*-1)}+$$

$$+\frac{M}{2k(2k+1)}=\frac{1}{2k(2k+1)}\sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{2k-1-i}\left(2^{2(2k-1-i-j)}M^2(M+1)^{4(2k-1-i-j)}\times\right.\right.$$

$$\times\sum_{m=0}^{2k-1-i-j}\left(\frac{1}{(2k-i-j-m-1)(2k-i-j-m-2)}\cdot\frac{1}{m^*(m^*-1)}\right)\Bigg)\times$$

$$\times\left(2^{2j}M^2(M+1)^{4j}\sum_{l=0}^{j}\left(\frac{1}{(j-l)^*((j-l)^*-1)}\cdot\frac{1}{l^*(l^*-1)}\right)\right)\Bigg)\times$$

$$\times\frac{2^{2i}M(M+1)^{4i}}{i^*(i^*-1)}+\frac{M}{2k(2k+1)}\le\frac{2^{2(2k-1)}M^5(M+1)^{4(2k-1)}}{2k(2k+1)}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{2k-1-i}\left(\left(\sum_{m=0}^{2k-1-i-j}\frac{1}{(2k-i-j-m-1)(2k-i-j-m-2)}\cdot\frac{1}{m^*(m^*-1)}\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{(j-l)^*((j-l)^*-1)}\cdot\frac{1}{l^*(l^*-1)}\right)\Bigg)\Bigg)\cdot\frac{1}{i^*(i^*-1)}+\frac{1}{2k(2k+1)}M\le$$

$$\le\frac{1}{2k(2k+1)}2^{2(2k+1)}M(M+1)^{4(2k+1)},$$

где $(2k-1-i-j-m)^*=\begin{cases}1,(2k-1-i-j-m)=0,1\\(2k-1-i-j-m),(2k-1-i-j-m)=2,3,...\end{cases}$,

$$(2k-1-i-j)^*=\begin{cases}1,(2k-1-i-j)=0,1\\(2k-1-i-j),(2k-1-i-j)=2,3,...\end{cases},\quad m^*=\begin{cases}1,m=0,1\\m,m=2,3,...\end{cases},$$

$$(2k-1-i)^*=\begin{cases}1,(2k-1-i)=0,1\\(2k-1-i),(2k-1-i)=2,3,...\end{cases},\quad l^*=\begin{cases}1,l=0,1\\l,l=2,3,...\end{cases},\quad j^*=\begin{cases}1,j=0,1\\j,j=2,3,...\end{cases},$$

$$(j-l)^*=\begin{cases}1,(j-l)=0,1\\(j-l),(j-l)=2,3,...\end{cases},\quad i^*=\begin{cases}1,i=0,1\\i,i=2,3,...\end{cases}.$$

Аналогичное соотношение имеем и в случае $n+1=2k$. Таким образом, подтверждаем оценку для коэффициентов C_n ряда (9).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}2^{2n}\cdot M(M+1)^{4n}\left|z-z_0\right|^n, \tag{16}$$

который является мажорирующим для ряда (9). На основании признака Даламбера заключаем сходимость ряда (16) в области $|z-z_0| < \dfrac{1}{2^2(M+1)^4}$. Тогда, положив $\rho = \min\left\{\rho_0, \dfrac{1}{2^2(M+1)^4}\right\}$, получаем сходимость ряда (9) в области (10), что доказывает нашу теорему.

Полученные в данной теореме оценки позволяют построить приближенное решение задачи (6)-(7):

$$y_N(z) = \sum_{n=0}^{N} C_n (z-z_0)^n . \qquad (17)$$

Теорема 2. *Пусть выполняются пп. 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения (17) задачи (3)-(4) в области (10) справедлива оценка погрешности*

$$\Delta y_N(z) \le \frac{2^{2N+2}\cdot M(M+1)^{4N+4}|z-z_0|^{N+1}}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{1-2^2\cdot(M+1)^4\cdot|z-z_0|}, \qquad (18)$$

где $\rho = \min\left\{\rho_0, \dfrac{1}{2^2(M+1)^4}\right\}$, $M = \max\left\{|y_0|, \sup\limits_n \dfrac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!}\right\}$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Доказательство. По определению

$$\Delta y_N(z) = |y(z) - y_N(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n - \sum_{n=0}^{N} C_n (z-z_0)^n\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n|\cdot|z-z_0|^n .$$

Учитывая оценки для C_n из теоремы 1, имеем

$$\Delta y_N(z) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} 2^{2n}\cdot M(M+1)^{4n}|z-z_0|^n \le \frac{1}{N(N+1)}\cdot 2^{2N+2}\cdot M(M+1)^{4N+4}|z-z_0|^{N+1} \times$$

$$\times \frac{1}{1-2^2\cdot(M+1)^4\cdot|z-z_0|} .$$

Пример. Найдем приближенное решение задачи (6)-(7) в случае $r(z)=0$ для начальных условий $y(0{,}5+0{,}5i) = 1+i$ и $y'(0{,}5+0{,}5i) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} i$.

Данная задача имеет точное решение $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{1+\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i - 2z}}$. Найдем радиус аналитичности $\rho = 0{,}007359312$. Выберем значение $z = 0{,}501 + 0{,}501i$ из области голоморфности. Применяя (17), $N = 3$, вычислим приближенное значение функции. Произведенные расчеты приведены в таблице 1, где y_3 – приближенное решение (17);

y – значение точного решения;

Δy_3 – оценка погрешности приближенного решения (18);

Δy – истинная величина погрешности приближенного решения y_3;

$\Delta_1 y$ – апостериорная оценка погрешности, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности. На основании апостериорной оценки убеждаемся в том, что в структуре приближенного решения (17) значение $N = 5$. Добавки в структуре приближенного решения для $N = 4$ и $N = 5$ в общей сумме не превышают требуемой точности. Поэтому в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 3$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\xi = 0{,}00001$.

Таблица 1

z	y_3	y	Δy_3	Δy	$\Delta_1 y$
0,501+0.501i	1,000004015+1,002305401i	0,999995985+1,002313401i	0,00019894	0,000011335	0,00001

Резюме. В статье доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, что позволяет построить приближенное решение для данного уравнения в области голоморфности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов, В. Н.* Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 2 (12). – С. 75–82.

2. *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2008. – № 4. – С. 102–108.

3. *Орлов, В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиационного института. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.

4. *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по мат-лам международ. науч.-практ. конф., Чебоксары, 12-15 августа 2013 г. Ч. 2. Математическое моделирование и информационные технологии. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 47-52.

5. *Орлов, В. Н.* Приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в области голоморфности / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 133–139.