УДК: 517.925.7

ТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

EXACT CRITERIA OF EXISTENCE OF MOVABLE SPECIAL POINTS FOR SOLUTION OF A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

В. Н. Орлов, М. П. Гузь

V. N. Orlov, M. P. Guz

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары

Аннотация. Рассматривается обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной частью четвертой степени, обладающее подвижными особыми точками и в общем случае неразрешимое в квадратурах. Предлагаются точные критерии существования подвижных особых точек решений данного уравнения. На их основе строится алгоритм нахождения подвижных особых точек решения уравнения с заданной точностью. Рассмотрен случай действительной области.

Abstract. The article considers an ordinary nonlinear differential equation of the first order with polynomial part of the fourth degree with solutions having movable singularities and in general non-solvable in quadratures. The article suggests the exact criteria of existence of movable special points for solutions of this equation. On this basis the algorithm of finding the movable special points for solutions of the equation is made. The case of the valid area is considered.

Ключевые слова: *нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, необходимые и достаточные условия существования, подвижные особые точки, точные критерии существования.*

Keywords: *nonlinear differential equation, Cauchy's problem, necessary and sufficient conditions of existence, movable special points, exact criteria of existence.*

Актуальность исследуемой проблемы. Проблема разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений рассматривается уже в течение двух веков. Причина этой проблемы состоит в наличии подвижных особых точек решения, которые относят эти нелинейные дифференциальные уравнения к классу уравнений, в общем случае неразрешимых в квадратурах, и невозможности, в связи с этим, применения к таким уравнениям известных численных и аналитических приближенных методов решения. В последнее время появились работы [4], [5], [6], [8], [10], [11], [12], [13], в которых предлагается метод приближенного решения данной категории уравнений. Метод применялся к уравнениям Абеля [4], Риккати [12], Пенлеве [10], а также к нелинейным уравнениям первого порядка с полиномиальной частью пятой степени [6]. В данной работе он применяется к уравнению с полиномиальной частью четвертого порядка. Этот метод содержит шесть задач, возникающих в результате исследований. В работах [2], [3], [7], [9] решены три задачи из этого перечня: доказательство теорем существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности и в окрестности подвижной особой точки; построение аналитических продолжений рассматриваемого уравнения; исследование влияния возмущения начальных данных и подвижной особой точки на приближенное решение. В статье предлагается решение четвертой задачи: получения точных критериев существования подвижных особых точек. Решение этой задачи является основой для алгоритмов нахождения подвижных особых точек с заданной точностью.

Материал и методика исследований. Используются методы аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики, математического анализа, численного моделирования.

Результаты исследований и их обсуждение. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f_0(x) + f_1(x)\cdot y(x) + f_2(x)\cdot y^2(x) + f_3(x)\cdot y^3(x) + f_4(x)\cdot y^4(x), \qquad (1)$$

где f_i – функции действительной переменной в некоторой рассматриваемой области.

Данное дифференциальное уравнение с помощью замены переменной $y = w\cdot(u_1 + v_1)$ при условии

$$\frac{1}{3f_4(x)} = \frac{2f^2(x)}{3f_3(x)} = \frac{3f_1(x)f_4(x) + f_4'(x)}{2f_4(x)f_2(x)}$$

приводится к нормальному виду [9]:

$$y'(x) = y^4(x) + r(x), \qquad (2)$$

который вместе с начальным условием

$$y(x_0) = x_0 \qquad (3)$$

составляет задачу Коши.

Рассмотрим задачу Коши для инверсного уравнения

$$u'(x)u^2(x) = -1 - r(x)\cdot u^4(x), \qquad (4)$$

полученного с помощью замены

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}, \qquad (5)$$

с начальным условием

$$u(x_0) = u_0. \qquad (6)$$

Для оптимизации поиска подвижных особых точек, так же как и в публикациях [5], [6], [12], [13], используются факты математического анализа о связи локальных экстремумов прямой и инверсной функций. Данная теорема работает и в нашем случае.

Теорема 1. *Пусть* $y(x)$ *– решение задачи (2)–(3) и* $u(x)$ *– решение задачи Коши (4), (6) – непрерывны на отрезке* $[a;b]$.

Для того, чтобы решение задачи (2)–(3) $y(x)$ *имело в точке* $c \in (a,b)$ *локальный максимум (минимум),* $y(c) = const > 0$ $(y(c) = const < 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (4), (6)* $u(x)$ *в этой точке имело локальный минимум (максимум).*

Доказательство основано на необходимых и достаточных условиях локального экстремума.

Теорема 2. *Пусть функция* $y(x)$ *является решением задачи Коши (2)–(3) и определена на промежутке* $[x_0; x^*)$, *где* x^* *– подвижная особая точка данной функции, причем* $x^* > x_0$. *Тогда существует такая окрестность* $[a; x^*)$ *точки* x^*, *в которой* $y(x) > 0,\ y'(x) > 0,\ y''(x) > 0$, ($y(x) < 0,\ y'(x) < 0,\ y''(x) < 0$).

Доказательство. Решение функции $y(x)$ в окрестности подвижной особой точки (слева) в соответствии с [4], [5], [10], [12], [13] представимо в виде

$$y(x) = \left(x - x^*\right)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x^*\right)^{n/3}, \tag{7}$$

где $\rho = -1/3,\ C_0 = -1/\sqrt[3]{3},\ C_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 5, 6, 9$.

На основании теоремы существования [5] имеется точка $x_1 \in [x_0; x^*)$ такая, что правильная часть ряда (7) сходится на промежутке $[x_1; x^*)$. Представим (7) в следующем виде:

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3(x - x^*)}} + C_4 (x - x^*) + C_7 (x - x^*)^2 + C_8 (x - x^*)^{7/3} + C_{10} (x - x^*)^3 + \ldots . \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по x, получаем

$$y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{3(x - x^*)^4}} + C_4 + 2C_7 (x - x^*) + \frac{7}{3} C_8 (x - x^*)^{4/3} + 3C_{10} (x - x^*)^2 + \ldots . \tag{9}$$

Обозначим

$$y'(x) = g_1(x) + h_1(x),$$

$$g_1(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{3(x - x^*)^4}};\ h_1(x) = C_4 + 2C_7 (x - x^*) + \frac{7}{3} C_8 (x - x^*)^{4/3} + 3C_{10} (x - x^*)^2 + \ldots .$$

Так как $g_1(x) \to +\infty$ и $h_1(x) \to C_4$ при $x \to x^* - 0$, то существует такая точка x_2, при этом $x_2 \ge x_1$, и $\forall x \in [x_2; x^*)$ будет верно неравенство

$$g_1(x) > h_1(x).$$

Поскольку $g_1(x)$ – правильная часть ряда (9), следовательно, $y'(x) > 0$.

Дифференцируя дважды (7) по x, получаем

$$y''(x) = \frac{4}{9\sqrt[3]{3(x^* - x)^7}} - 2C_7 - \frac{28}{9} C_8 (x^* - x)^{1/3} - 6C_{10} (x^* - x) + \ldots . \tag{10}$$

Представим вторую производную в виде

$$y''(x) = g_2(x) + h_2(x),$$

где $g_2(x) = \dfrac{4}{9\sqrt[3]{3(x^* - x)^7}}$, $h_2(x) = -2C_7 - \dfrac{28}{9} C_8 (x^* - x)^{1/3} - 6C_{10} (x^* - x) + \ldots .$

Так как $g_2(x) \to +\infty$ и $h_2(x) \to -2C_7$ при $x \to x^* - 0$, то существует такая точка x_3, что $x_3 \ge x_1$, и $\forall x \in [x_3; x^*)$ будет верно неравенство

$$g_2(x) > h_2(x).$$

Поскольку $g_2(x)$ – правильная часть ряда (10), следовательно, $y''(x) > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $y(x)$ *– решение задачи* (2)–(3). *Для того, чтобы* x^* *являлась подвижной особой точкой решения* $y(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $x(u)$, *обратная к решению инверсной задачи Коши* (5)–(6), *удовлетворяла следующим условиям:*

$$x(0) = x^*,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 0,\ x'''(0) = -2\,. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. С учетом инверсии представим $u(x)$ в виде регулярного ряда [1], [13]:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x^*)^{n/3}, \tag{12}$$

где x^* является нулем инверсной функции.

С учетом того, что $u(x^*) = 0$, на основании обращения рядов [1] следует, что

$$(x - x^*)^{1/3} = B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4 + \ldots,$$

где

$$B_1 = C_0 = -1/\sqrt[3]{3}, \tag{13}$$

или

$$x - x^* = (B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4 + \ldots)^3.$$

Отсюда получаем, что

$$x - x^* = B_1^{\,3} u^3 + \tilde{B}_2 u^4 + \tilde{B}_3 u^5 + \tilde{B}_4 u^6 + \ldots. \tag{14}$$

Это соотношение доказывает пункт 1 в теореме 3 о голоморфности функции $x(u)$ в некоторой окрестности $(0; x^*)$.

Дифференцируя (14) по u, получаем:

$$x' = 3B_1^{\,3} u^2 + 4\tilde{B}_2 u^3 + 5\tilde{B}_3 u^4 + 6\tilde{B}_4 u^5 + \ldots,$$

$$x'' = 6B_1^{\,3} u + 12\tilde{B}_2 u^2 + 20\tilde{B}_3 u^3 + 30\tilde{B}_4 u^4 + \ldots,$$

$$x''' = 6B_1^{\,3} + 24\tilde{B}_2 u + 60\tilde{B}_3 u^2 + 120\tilde{B}_4 u^3 + \ldots.$$

Находим $x'(0) = 0,\ x''(0) = 0,\ x'''(0) = 6B_1^{\,3} = 6(-1/\sqrt[3]{3})^3 = -2$. Что и требовалось доказать.

Достаточность.

Покажем, что $y(x)$ в окрестности подвижной особой точки имеет аналитическую структуру.

По условию теоремы 3 имеем:

$$x(u) = B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4 + \ldots\,, \tag{15}$$

тогда

$$x' = B_1 + 2B_2 u + 3B_3 u^2 + 4B_4 u^3 + 5B_5 u^4 \ldots,$$

$$x'' = 2B_2 + 6B_3 u + 12B_4 u^2 + 20B_5 u^3 \ldots,$$

$$x''' = 6B_3 + 24B_4 u + 60B_5 u^4 \ldots.$$

Из (11), (15) и последних соотношений находим:

$$B_0 = x^*,\ B_1 = 0,\ B_2 = 0,\ B_3 = -1/3.$$

Тогда (15) принимает вид

$$x(u) = x^* - \frac{1}{3}u^3 + \widetilde{B}_4 u^4 + .\widetilde{B}_5 u^5 \ldots$$

или

$$x - x^* = -\frac{1}{3}u^3 + \widetilde{B}_4 u^4 + .\widetilde{B}_5 u^5 \ldots$$

На основании обращения рядов [3] следует, что

$$u(x) = A_1 (x - x^*)^{1/3} + A_2 (x - x^*)^{2/3} + A_3 (x - x^*) + \ldots,$$

где $A_1 = -\sqrt[3]{3}$.

Принимая во внимание (5), получаем

$$y(x) = C_0 \left(x - x^*\right)^{-1/3} + C_1 \left(x - x^*\right)^0 + C_2 \left(x - x^*\right)^{1/3} + C_3 \left(x - x^*\right)^{2/3} + \ldots,$$

т. е.

$$y(x) = \left(x - x^*\right)^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x^*\right)^{n/3},$$

где $C_0 = -1/\sqrt[3]{3}$.

Таким образом, x^* является подвижной особой точкой решения задачи (2)–(3). Что и требовалось доказать.

Следствие. *Функция* $u'(x)$ *при переходе через точку* $(0; x^*)$ *меняет знак. При этом* x^* *является подвижной особой точкой решения задачи* (2)–(3).

Следующая теорема, представляющая собой интервальный критерий существования подвижных особых точек, является основой для алгоритма построения таких точек с заданной точностью.

Теорема 4. *Пусть* $y(x)$ *– решение задачи* (2)–(3), x^* *будет являться подвижной особой точкой решения* $y(x)$ *тогда и только тогда, когда существует окрестность подвижной особой точки* $[x_1; x_2]$, $x^* \in [x_1; x_2]$, *на которой функция* $u(x)$ *– решение задачи Коши (4), (6) для инверсного уравнения – является непрерывной, и выполняется условие:* $u(x_1) > 0; u(x_2) < 0$.

Доказательство. Необходимость.

Так как x^* является подвижной особой точкой решения, $y(x)$ имеет соответствующую структуру (7).

Из (5) следует, что

$$u(x) = \frac{1}{y(x)}. \qquad (16)$$

Данная инверсия позволяет утверждать, что x^* переходит в класс регулярных точек.

На отрезке $[x_1; x_2]$, $y(x)$ имеет соответствующие значения: $y(x_1) > 0$ и $y(x_2) < 0$, следовательно, на этом отрезке $u(x_1) > 0$ и $u(x_2) < 0$.

Так как для $u(x)$ x^* – регулярная точка, следовательно, $u(x)$ на $[x_1; x_2]$ является непрерывной.

Достаточность. По условию теоремы $u(x) \in [x_1; x_2]$. Так как $u(x_1) > 0$ и $u(x_2) < 0$, значит, существует такая точка x_3, $x_3 \in [x_1, x_2]$, в которой $u(x_3) = 0$. Следовательно, в силу инверсии точка x_3 является подвижной особой точкой $y(x)$.

Резюме. Таким образом, были сформулированы и доказаны необходимое и достаточное условия существования подвижных особых точек решения одного нелинейного дифференциального уравнения. На основе доказанных теорем можно осуществить построение алгоритма поиска подвижных особых точек с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

2. *Орлов, В. Н.* Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 2 (12). – С. 75–82.

3. *Орлов, В. Н.* Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения // В. Н. Орлов, М. П. Гузь // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по мат-лам международ. науч.-практ. конференции, Чебоксары, 12–15 августа 2013 г. : в 2 ч. Ч. 2. Математическое моделирование и информационные технологии. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 36–46.

4. *Орлов, В. Н.* Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2009. – № 4 (35). – С. 23–32.

5. *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля / В. Н. Орлов. – М. : МПГУ, 2013. – 174 с.

6. *Орлов, В. Н.* Необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек решений одного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по мат-лам международ. науч.-практ. конференции, Чебоксары, 12–15 августа 2013 г. : в 2 ч. Ч. 2. Математическое моделирование и информационные технологии. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 53–59.

7. *Орлов, В. Н.* О приближенном решении в области голоморфности одного нелинейного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // Труды Третьей международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Брест, 17– 22 сентября 2012 г. – Брест, 2012. – С. 208–212.

8. *Орлов, В. Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.

9. *Орлов, В. Н.* Об одной теореме существования нелинейного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, А. Я. Корнилов, М. П. Гузь // Понтрягинские чтения – XXIII, XXVI Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 3–9 мая 2012 г. – Воронеж, 2012. – С. 44–47.

10. *Орлов, В. Н.* Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. IM НАН України. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.

11. *Орлов, В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Московского авиационного института. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.

12. *Орлов, В. Н.* Об одном точном критерии существования подвижной особой точки решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 209–213.

13. *Орлов, В. Н.* Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля / В. Н. Орлов // Известия института инженерной физики. – 2009. – № 4 (14). – С. 12–14.