

УДК 539.374

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ
ТРАНСЛЯЦИОННО-АНИЗОТРОПНОЙ ЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

**ELASTOPLASTIC STATE OF TRANSLATIONAL ANISOTROPIC LINEAR
INHOMOGENEOUS PIPE UNDER INTERNAL PRESSURE**

А. В. Никитин, С. В. Тихонов

A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov

*ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары*

Аннотация. Рассматривается упругопластическое состояние линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при трансляционной анизотропии. Материал предполагается неоднородным и обладающим свойствами трансляционной анизотропии в пластической области. Неоднородность материала заключается в том, что предел текучести зависит от координат, причем он постоянен вдоль параллельных прямых. Определены напряженное состояние и граница раздела упругой и пластической областей.

Abstract. This paper considers the elastoplastic state of linear inhomogeneous pipe under internal pressure at translational anisotropy. The material is assumed to be inhomogeneous and characterized by translational anisotropy in plastic region. The inhomogeneity of the material is about the yield stress depending on the coordinates, and it's permanent along the parallel lines. The stress state and interface of the elastic and plastic regions are determined.

Ключевые слова: *упругость, пластичность, неоднородность, труба, трансляционная анизотропия.*

Keywords: *elasticity, plasticity, inhomogeneity, pipe, translational anisotropy.*

Актуальность исследуемой проблемы. Задачи определения напряженно-деформированного состояния неоднородных тел находят широкое применение в реакторной технике, при образовании горных выработок, при проектировании сложных структур (различных сплавов, конструкций, состоящих из двух или более материалов) и др. Результаты решения задач упругопластического состояния линейно-неоднородных труб позволяют учитывать влияние трансляционной анизотропии на линейно-неоднородную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления.

Материал и методика исследований. В ходе работы применялись методы математического анализа и апробированные модели механического поведения тел. Решение найдено методом последовательных приближений.

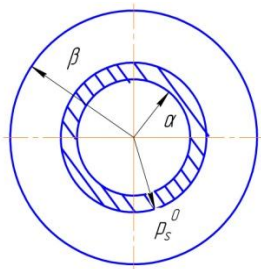
Результаты исследований и их обсуждение. Решению задач теории пластичности для неоднородных тел посвящена обширная литература. В 50–60-е годы прошлого столетия особое развитие теория пластичности неоднородных тел получила в труде

польской школы механиков под руководством профессора В. Ольшака [12]. Упругопластическое состояние неоднородных тел изучали такие авторы, как С. В. Тихонов [15], П. Н. Кузнецов [8], [9], Л. А. Максимова [10] и др. Отметим также фундаментальные исследования Н. М. Беляева и А. К. Синицкого [1], П. У. Бриджмена [2], В. В. Соколовского [14], А. А. Ильюшина [6] и др.

Пластическое деформирование сопровождается приобретением материалом свойств пластической анизотропии. Среди моделей пластических тел, описывающих приобретение материалом свойств пластической анизотропии, следует выделить модели трансляционного упрочнения, предложенные А. Ю. Ишлинским [7] и В. Прагером [13]. На основе подобных представлений Д. Д. Ивлев [3] и его сотрудники предложили модель идеальнопластического тела с трансляционной анизотропией. Обычно идеальная пластическая анизотропия рассматривается на основе представлений Мизеса–Хилла. Подобные модели в исходном варианте не учитывают эффект Баушингера, проявляющийся в изменении пределов текучести при растяжении – сжатии. Модели идеальнопластического тела с трансляционной анизотропией учитывают подобные эффекты.

Упругопластические задачи с учетом трансляционной анизотропии рассмотрены в работах Т. В. Митрофановой [11], С. О. Фоминых [16], [17], [18].

В данной задаче рассматривается развитие идей [10], [11], [15], [16], [18], а именно наложение трансляционной анизотропии на неоднородность материала. В отличие от ранее рассмотренных задач в данной статье предполагается, что предел текучести постоянен вдоль параллельных прямых.



ρ_s^0 – радиус раздела упругой и пластической областей в нулевом приближении
 α – внутренний радиус трубы
 β – внешний радиус трубы

Рис. 1. Толстостенная труба радиусов α, β ; $\alpha < \beta$

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов α, β ; $\alpha < \beta$ (рис. 1). Условие пластичности примем в таком виде [5]:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}, \quad k_1, k_2, k_3 = const, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Положим

$$k_{xy} = k_0 + \delta(\bar{a}x + \bar{b}y), \quad k_0, \bar{a}, \bar{b} = const, \quad (2)$$

где δ – малый безразмерный параметр.

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k_0 . Компонентам напряжений в пластической зоне приписан индекс « p » наверху, компонентам в упругой зоне – индекс « e » наверху.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (3)$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (4)$$

Из (3), (4) имеем условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right)^2 + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right) \cos(2\theta + \mu) - \\ - 2\tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta + \mu) + R^2 - 1 - 2\rho\delta R_0 \sin(\theta + \eta) = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{2} = \sin \mu, \\ R_0 &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{a}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \eta, \quad \frac{b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \eta.\end{aligned}$$

Предположим

$$k_1 = \delta_1 k'_1, \quad k_2 = \delta_1 k'_2, \quad k_3 = \delta_1 k'_3. \quad (6)$$

Обозначим, что $R = \delta_1 R'$, $R' = \sqrt{\left(\frac{k'_1 - k'_2}{2}\right)^2 + k'_3}$. В дальнейшем положим, что

$$\delta_1 = g_1 \delta_1 \text{ и } 0 \leq g_1 \leq 1.$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij}\delta + \sigma''_{ij}\delta^2 + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho'_s\delta + \rho''_s\delta^2 + \dots, \quad (8)$$

где ρ_s – радиус пластической зоны.

Впоследствии перейдем к безразмерным значениям радиусов трубы α, β и черту сверху у величин \bar{a}, \bar{b} опустим. Положим, что $\bar{b} = \alpha / \rho_s^{(0)}$, $\beta = \beta / \rho_s^{(0)}$, где $\rho_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в нулевом приближении.

Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль прямых

$$ax + by = c, \quad c - const \quad (9)$$

и изменяется в зависимости от изменения величины c .

Будем считать, что на внутренней поверхности трубы действует постоянное давление p , а внешняя поверхность свободна от усилий.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде (8).

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (10)$$

Из (1), (8), (10) имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = -2. \quad (11)$$

Решая совместно (7), (10), (11), получим

$$\sigma_\rho^{(0)p} = 2 \ln \rho + C, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = 2 + 2 \ln \rho + C, \quad (12)$$

где $C - const$.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p , внешняя граница трубы свободна от усилий:

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \sigma_\rho^{(0)e} \Big|_{\rho=\beta} = 0. \quad (13)$$

Из (12), (13) имеют место

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \quad (14)$$

Решение в упругой области в нулевом приближении будем искать в виде

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - B \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + B \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (15)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе имеют следующий вид:

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\theta^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (16)$$

Из (16) согласно (13), (14)

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right). \quad (17)$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношением $\beta^2 = \frac{1}{1 - 2 \ln \alpha - p}$.

Переходя к полярным координатам, по формуле (4) из (1), (2), (8), (11), (12) получим в первом приближении

$$\sigma'_g{}^p - \sigma'_p{}^p = -2(R' \cos(2\theta + \mu)) + 2(a\rho \cos \theta + b\rho \sin \theta). \quad (18)$$

Уравнения равновесия (7) удовлетворим, полагая, что

$$\sigma'_{\rho}{}^p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma'_{\theta}{}^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau'_{\rho\theta}{}^p = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (19)$$

Из (18), (19) имеет место

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -2R' \rho^2 \cos(2\theta + \mu) + 2\rho^3 (a \cos \theta + b \sin \theta). \quad (20)$$

В первом приближении граничные условия согласно [4] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho}{}^p |_{\rho=\alpha} &= 0, \\ \tau'_{\rho\theta}{}^p |_{\rho=\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Решение в пластической зоне будет определяться из (18), (19), (20), (21):

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho}{}^p &= -R' \left(\frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) g_1 \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + (a \cos \theta + b \sin \theta) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right), \\ \sigma'_{\theta}{}^p &= -R' \left(\frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + 1 \right) g_1 \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + (a \cos \theta + b \sin \theta) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + 3\rho \right), \\ \tau'_{\rho\theta}{}^p &= R' \left(\frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) g_1 \sin(2\theta + \mu) + \\ &\quad + (-b \cos \theta + a \sin \theta) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right). \end{aligned} \quad (22)$$

На упругопластической границе при $\rho = 1$ из (22) следует:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho}{}^p &= a'' \cos \theta + b'' \sin \theta + a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta, \\ \tau'_{\rho\theta}{}^p &= a_1''' \cos \theta + b_1''' \sin \theta + a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_2'' &= -R'\alpha \cos \mu \left[\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] + R' \cos \mu, \\
 b_2'' &= R' \sin \mu \left[\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \sin \mu, \\
 a_2''' &= R'\alpha \sin \mu \left[\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \sin \mu, \\
 b_2''' &= R'\alpha \cos \mu \left[\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \cos \mu, \\
 a_1'' &= (-\alpha^2 a + a), b_1'' = (-\alpha^2 b + b), a_1''' = (\alpha^2 b - b), b_1''' = (-\alpha^2 a + a).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Напряжения в упругой области определим согласно [3]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho}^{r_e} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (a \cos \theta + b \sin \theta) + \\
 &+ \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N} (\beta^4 \rho^4 + 2\beta^6 \rho^4 - \rho^4 - 3\beta^4 + 2\beta^6 + \beta^8 - 2\beta^4 \rho^2 + 4\beta^2 \rho^2 - 2\beta^8 \rho^2) \cdot \\
 &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) + \\
 &+ \frac{1}{\rho^4 N} (2\beta^2 \rho^4 - 2\rho^4 + 2\beta^4 - 2\beta^2 + 2\rho^2 - 2\beta^4 \rho^2) \cdot \\
 &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu), \\
 \sigma_{\theta}^{r_e} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(\rho + \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (a \cos \theta + b \sin \theta) + \\
 &+ \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N} (\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 + \rho^4 + 3\beta^4 - 2\beta^6 - \beta^8 + 6\beta^4 \rho^6 - 4\beta^2 \rho^6 - 2\rho^6) \cdot \\
 &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) + \\
 &+ \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N} (2\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 + 2\beta^8 - 2\beta^6 + 3\rho^6 \beta^4 - 4\beta^2 \rho^6 + \rho^6) \cdot \\
 &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu), \\
 \tau_{\rho\theta}^{r_e} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (-b \cos \theta + a \sin \theta) + \\
 &+ \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N} (\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 + \rho^4 - 3\beta^4 + 2\beta^6 + \beta^8 + 3\beta^4 \rho^6 - 2\beta^2 \rho^6 - \rho^6 - \beta^4 \rho^2 + 2\beta^2 \rho^2 - \beta^8 \rho^2) \cdot \\
 &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \sin(2\theta + \mu) + \\
 &+ \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N} (2\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 - 2\beta^8 + 2\beta^6 + 3\rho^6 \beta^4 - 4\beta^2 \rho^6 + \rho^6 + \beta^4 \rho^2 - \beta^8 \rho^2) \cdot \\
 &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \sin(2\theta + \mu).
 \end{aligned} \tag{25}$$

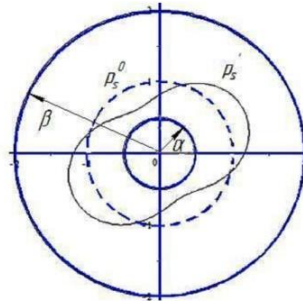
С учетом (14) и (15) для определения границы упругопластической области в первом приближении имеем формулу:

$$\rho'_s = \frac{\sigma_{\theta}^{\prime p} - \sigma_{\theta}^{\prime e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{4}(\sigma_{\theta}^{\prime e} - \sigma_{\theta}^{\prime p}). \quad (26)$$

Из (22), (25) и (26) получим границу упругопластической области в первом приближении:

$$\begin{aligned} \rho'_s &= \frac{1}{4}(\sigma_{\theta}^{\prime e} - \sigma_{\theta}^{\prime p}) = \frac{1}{4}(a \cos \theta + b \sin \theta) \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \right) (1 + \beta^4) - (3 - \alpha^2) + \\ &+ \frac{1}{4\beta^4 \rho^4 N} (2\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 + 2\rho^8 - 2\beta^6 - 6\beta^4 \rho^6 - 8\beta^2 \rho^6 + 2\rho^6) \cdot \\ &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) + \\ &+ \left(\frac{1}{4\beta^4 \rho^4 N} (\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 + \rho^4 + 3\beta^4 - 2\beta^6 - \beta^8 + 6\beta^4 \rho^6 - 4\beta^2 \rho^6 - 2\rho^6) + 1 \right) \cdot \\ &\cdot R' \left[\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) - \\ &- \left(\frac{1}{4\beta^4 \rho^4 N} (\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 + \rho^4 + 3\beta^4 - 2\beta^6 - \beta^8 + 6\beta^4 \rho^6 - 4\beta^2 \rho^6 - 2\rho^6) - 1 \right) \cdot \\ &\cdot R' g_1 \cos(2\theta + \mu). \end{aligned} \quad (27)$$

Граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближениях при $b = 0.002$, $R' = 1.2$, $a = 0.1$, $g_1 = 1.6$, $\mu = 5.3$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.7$, $N = 25$, $\rho = 2.5$ представлена на рис. 2.



ρ_s^0 - радиус раздела упругой и пластической областей в нулевом приближении
 ρ_s^1 - радиус раздела упругой и пластической областей в первом приближении
 α - внутренний радиус трубы
 β - внешний радиус трубы

Рис. 2. Граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближениях

Резюме. Напряженное состояние в пластической (22) и упругой (25) зонах полностью определено. Изменение границы пластической зоны определяется из соотношений (27).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев, Н. М.* Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах / Н. М. Беляев, А. К. Синицкий // Изв. АН СССР (ОТН). – 1938. – № 2. – С. 320–333.
2. *Бриджмен, П.* Исследование больших пластических деформаций и разрывов / П. Бриджмен. – М. : ИЛ, 1955. – 444 с.
3. *Ивлев, Д. Д.* К теории идеальной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1959. – Вып. 6. – С. 1107–1114.
4. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
5. *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 583–584.
6. *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 377 с.
7. *Ишлинский, А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением / А. Ю. Ишлинский // Украинский математический журнал. – 1954. – Т. 6. – № 3. – С. 314–325.
8. *Кузнецов, П. Н.* Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусосном растяжении / П. Н. Кузнецов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1. – С. 134–141.
9. *Кузнецов, П. Н.* Упругопластическое состояние тел с неоднородными включениями : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / П. Н. Кузнецов. – Чебоксары, 2009. – 15 с.
10. *Максимова, Л. А.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.
11. *Митрофанова, Т. В.* Об условиях трансляционной анизотропии идеальнопластических тел при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). Ч. 3. – С. 596–600.
12. *Ольшак, В.* Теория пластичности неоднородных тел / В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский. – М. : Мир, 1964. – 156 с.
13. *Прагер, В.* Проблемы теории пластичности / В. Прагер. – М. : Физматгиз., 1958. – 136 с.
14. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
15. *Тихонов, С. В.* Упругопластическое состояние неоднородных тел, ослабленных отверстиями : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / С. В. Тихонов. – Чебоксары, 2007. – 75 с.
16. *Фоминых, С. О.* Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). Ч. 3. – С. 623–627.
17. *Фоминых, С. О.* Упругопластическое состояние тел, ослабленных отверстиями при наличии трансляционной анизотропии : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / С. О. Фоминых. – Чебоксары, 2011. – 15 с.
18. *Фоминых, С. О.* Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 211–226.