

УДК 539.374

**ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА
НА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ
ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ
ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ**

**NONLINEAR INHOMOGENEITY OF MATERIAL
WHEN STUDYING ELASTOPLASTIC STATE OF THICK-WALLED PIPE
UNDER INTERNAL PRESSURE AT TRANSLATIONAL ANISOTROPY**

А. В. Никитин, С. В. Тихонов

A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov

*ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», г. Чебоксары*

Аннотация. В работе рассматривается упругопластическое состояние нелинейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при трансляционной анизотропии. Предполагается, что предел текучести постоянен вдоль эллиптических кривых. Определены напряженное состояние и граница раздела упругой и пластической областей.

Abstract. This paper considers the elastoplastic state of nonlinear inhomogeneous pipe under internal pressure at translational anisotropy. It is assumed that the yield stress is permanent along the elliptic curves. The stress state and interface of the elastic and plastic regions are determined.

Ключевые слова: *упругость, пластичность, труба, трансляционная анизотропия.*

Keywords: *elasticity, plasticity, pipe, translational anisotropy.*

Актуальность исследуемой проблемы. Трансляционная анизотропия связана с переносом поверхности нагружения в процессе упрочнения. Трансляционная анизотропия учитывает эффект Баушингера – понижение предела текучести при сжатии или увеличение его при растяжении. Исследование напряженного состояния толстостенной трубы из нелинейно-неоднородного материала может найти применение при оптимальном проектировании изделий в машиностроении и строительной механике.

Материал и методика исследований. В ходе работы предполагается, что в пластической области материал обладает свойствами неоднородности и трансляционной анизотропии. Решение ищется методом последовательных приближений. Определены нулевое и первое приближения.

Результаты исследований и их обсуждение. В работах [4], [8], [10], [11] развита теория предельного состояния тел при наличии трансляционной анизотропии.

В исследованиях [6], [7] распространен метод последовательных приближений [3] к изучению тел из неоднородного материала.

В данной статье рассматривается упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при неоднородной трансляционной анизотропии. Неоднородность материала предполагается в виде зависимости предела текучести от координат. Предел текучести принят постоянным вдоль эллиптических кривых.

На основании результатов работы [3] условие пластичности для толстостенной трубы радиусов α, β , $\alpha < \beta$ (рис. 1) имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}, \quad k_1, k_2, k_3 - const, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

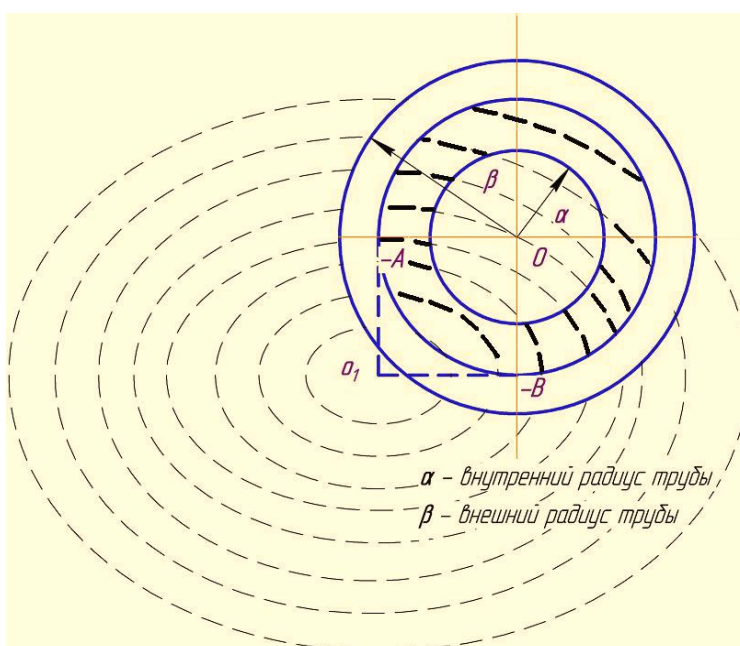


Рис. 1. Толстостенная труба радиусов α, β , $\alpha < \beta$

Предел текучести определим в виде

$$k_{xy} = k_0 + \delta \left(\frac{(x + A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y + B)^2}{\bar{b}^2} \right), \quad k_0, \bar{a}, \bar{b}, A, B - const, \quad (2)$$

где δ – малый безразмерный параметр.

В последующих расчетах для простоты все величины, которые имеют размерность напряжения, отнесем к величине предела текучести k_0 и таким образом перейдем к безразмерным величинам. Компонентам напряжений в пластической зоне приписан индекс « p » наверху, компонентам в упругой зоне – индекс « e » наверху.

Переходя к полярным координатам в формуле (1), получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta, \\ x &= \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.\end{aligned}\quad (4)$$

На основании соотношений (3), (4) условие пластичности в полярных координатах будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta}^p\right)^2 - 2R\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right) \cos(2\theta + \mu) - \\ - 2\tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta + \mu) + R^2 - 1 - 2\rho\delta R_0 \sin(\theta + \eta) = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu, \\ R_0 &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{a}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \eta, \quad \frac{b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \eta.\end{aligned}$$

На основании гипотезы

$$k_1 = \delta_1 k'_1, \quad k_2 = \delta_1 k'_2, \quad k_3 = \delta_1 k'_3, \quad (6)$$

с учетом обозначений $R = \delta_1 R'$, $R' = \sqrt{\left(\frac{k'_1 - k'_2}{2}\right)^2 + (k'_3)^2}$, в предположении $\delta_1 = g_1 \delta_1$ и $0 \leq g_1 \leq 1$ соотношения равновесия в полярной системе координат примут следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Разложим напряжение σ_{ij} по малому параметру δ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij} \delta + \sigma''_{ij} \delta^2 + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho'_s \delta + \rho''_s \delta^2 + \dots, \quad (8)$$

где ρ_s – радиус пластической зоны.

Для перехода к безразмерным величинам в размерах трубы α, β воспользуемся соотношениями $\bar{\alpha} = \alpha / \rho_s^{(0)}$, $\bar{\beta} = \beta / \rho_s^{(0)}$, где $\rho_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в нулевом приближении. Черту сверху у величин $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ опустим.

Учитывая, что k_y сохраняет постоянное значение вдоль эллипсов, что следует из соотношения (2), можно записать

$$\frac{(x+A)^2}{a^2} + \frac{(y+B)^2}{b^2} = c, \quad (9)$$

где c – некоторая const.

Так как в нулевом приближении для осесимметрического состояния трубы

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0, \quad (10)$$

на основании (1), (8), (10) следует

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = -2. \quad (11)$$

Тогда результатом совместного решения соотношений (7), (10), (11) являются

$$\sigma_\rho^{(0)p} = 2 \ln \rho + C, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = 2 + 2 \ln \rho + C, \quad (12)$$

где $C - const$.

Предполагая постоянное давление p на внутренней границе трубы и учитывая, что внешняя граница трубы свободна от усилий:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=\beta} = 0, \quad (13)$$

согласно (12), (13) заключаем

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \quad (14)$$

В упругой области представим нулевое приближение в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = A - B \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = A + B \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (15)$$

Примем во внимание условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (16)$$

Из (14), с учетом (13) и (16) получаем

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right). \quad (17)$$

В нулевом приближении радиус упругопластической зоны определяется соотношением $\beta^2 = \frac{1}{1 - 2 \ln \alpha - p}$.

Для первого приближения, учитывая полярные координаты (4), из (1), (2), (8), (11), (12) получим

$$\sigma'_{\theta}{}^p - \sigma'_{\rho}{}^p = -2R' \cos(2\theta + \mu) + 2 \left(\frac{(A + \rho \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(B + \rho \sin \theta)^2}{b^2} \right). \quad (18)$$

Положим

$$\sigma'_{\rho}{}^p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma'_{\theta}{}^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau'_{\rho\theta}{}^p = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (19)$$

Из (18), (19) имеет место

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -2R'\rho^2 \cos(2\theta + \mu) + 2\rho^2 \left(\frac{(A + \rho \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(B + \rho \sin \theta)^2}{b^2} \right). \quad (20)$$

Условия равновесия (7) удовлетворяются соотношением (19). С учетом (18), (20) и значений граничных условий в первом приближении [3]

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho}{}^p |_{\rho=\alpha} &= 0, \\ \tau'_{\rho\theta}{}^p |_{\rho=\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

находим решение в пластической зоне:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho}{}^p &= \frac{2(b^2 A \cos \theta + B a^2 \sin \theta)(\rho^4 - \alpha^4)}{a^2 b^2 \rho} + \cos(2\theta + \mu) \left(\frac{R' \alpha^2}{a^2} - \frac{\alpha}{\rho} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + \\ &+ \frac{2}{a^2 b^2} (b^2 A^2 + a^2 B^2) \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) + \frac{\alpha R'}{\rho} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \cos(2\theta - \mu) + \\ &+ \frac{1}{3\rho a^2 b^2} \left(\cos(2\theta) \alpha^3 (b^2 - a^2) \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right), \\ \sigma'_{\theta}{}^p &= -\frac{2\alpha^4}{a^2 b^2 \rho} (b^2 a \cos \theta + a^2 b \sin \theta) - R' \cos(2\theta + \mu) \left(\frac{\alpha}{\rho} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \cos(2\theta - \mu) + 1 \right) + \\ &+ \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \cos(2\theta) (a^2 - b^2) \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right)}{3a^2 b^2 \rho} + \frac{\alpha R' \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \cos(2\theta - \mu)}{\rho} + \\ &+ \left(\frac{a^2 + b^2}{6a^2 b^2 \rho} \right) (9\rho^3 - 3\alpha^2 \rho) + \left(\frac{b^2 A^2 + a^2 B^2}{6a^2 b^2 \rho} \right) \left(12\rho \left(\ln \frac{\rho}{\alpha} + 1 \right) \right) + \frac{6\rho}{a^2 b^2} (b^2 a \cos \theta + a^2 b \sin \theta), \\ \tau'_{\rho\theta}{}^p &= \frac{2(B a^2 \cos \theta - A b^2 \sin \theta)(\alpha^2 - \rho^2)}{a^2 b^2 \rho} + \sin(2\theta + \mu) \frac{R' \alpha}{\rho} \left(\sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + \\ &+ \frac{\sin(2\theta) \alpha^3 (a^2 - b^2) \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) (\sqrt{3} + 3)}{6a^2 b^2 \rho} + \frac{\rho^2}{2a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда на упругопластической границе при $\rho = 1$ из (22) вытекает:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{\rho'} &= a_0'' + a_1'' \cos \theta + b_1'' \sin \theta + a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{\rho'} &= a_0''' + a_1''' \cos \theta + b_1''' \sin \theta + a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta,\end{aligned}\tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}a_2'' &= \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \cos \mu - \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \mu - \\ &\quad - \frac{1}{3a^2b^2} \alpha^3 (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha), \\ b_2'' &= - \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - \frac{\alpha}{\rho} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \sin \mu - \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \sin \mu, \\ a_2''' &= R'\alpha \left(-\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \sin \mu, \\ b_2''' &= R'\alpha \left(-\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \cos \mu + \\ &\quad + \frac{\alpha^3 (a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)}{6a^2b^2} (\sqrt{3} + 3) + \frac{(b^2 - a^2)}{2a^2b^2}, \\ a_1'' &= \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^4), b_1'' = \frac{2B}{b^2} (1 - \alpha^4), a_1''' = \frac{2B}{b^2} (\alpha^2 - 1), b_1''' = -\frac{2A}{b^2} (\alpha^2 - 1), \\ a_0 &= \frac{-2}{a^2b^2} (b^2A^2 + a^2B^2) \ln(\alpha).\end{aligned}\tag{24}$$

Для упругой области согласно [3] находим напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)e} &= -\frac{2(b^2A^2 + a^2B^2)(\rho^2 - \beta^2) \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{(\beta^2 - 1)a^2b^2\rho^2} + \frac{2(\alpha^4 - 1)(\rho^4 - \beta^4)}{\rho^3(\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \cos \theta}{a^2} + \frac{B \sin \theta}{b^2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{3\beta^4\rho^4Na^2b^2} \left(((\beta^4\rho^4)(-\beta^2\rho^2 + 2\beta^4\rho^2 - 2\beta^2 + 4 - 2\beta^6) + \beta^4(-3 + 2\rho^2 - 1 + \beta^2) - \rho^4)\alpha \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left(\left((-3b^2R'\alpha + 3b^2a^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) \cos(2\theta + \mu) + (3a^2b^2R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) \cos(2\theta - \mu) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (b^2 - a^2)\alpha^2 \cos(2\theta) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{3\rho^4Na^2b^2} \left((\rho^2(1 - \rho^2) + \beta^2\rho^2(\rho^4 - \beta^2) + \beta^2(\beta^2 - 1)) \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left(\left(6R'\alpha a^2 b^2 \left(-\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right) \right) \cdot \\
 & \cdot \cos(2\theta + \mu) + 3 \cos(2\theta) (a^2 - b^2) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \alpha^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 1 \right) \Bigg), \\
 \sigma_{\theta}^{(I)e} = & \frac{2(b^2 A^2 + a^2 B^2)(\rho^2 + \beta^2) \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{(\beta^2 - 1)a^2 b^2 \rho^2} + \frac{2(\alpha^4 - 1)(3\rho^4 + \beta^4)}{\rho^3(\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \cos \theta}{a^2} + \frac{B \sin \theta}{b^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{3} \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N a^2 b^2} \left(\left((\beta^4 \rho^4) (\beta^2 - 2\beta^4 + \rho^2 \beta^2 - 4\rho^2) + \beta^4 (3 - 2\beta^2 - \beta^4) + \rho^4 (1 - 2\rho^2) \right) \alpha \cdot \right. \\
 & \cdot \left((-3b^2 R' \alpha + 3b^2 a^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) \cos(2\theta + \mu) + (3a^2 b^2 R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) \cos(2\theta - \mu) + \right. \\
 & \left. \left. + (b^2 - a^2) \alpha^2 \cos(2\theta) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right) + \\
 & + \frac{1}{3} \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N a^2 b^2} \left(\left((\beta^4 \rho^4) (\beta^2 \rho^2 - 2\beta^4 \rho^2 + 3\rho^4 \beta^2 - 2\rho^4 - \beta^2 + 2 - \beta^6) + \beta^4 (-3 + 2\beta^2 + \beta^4) + \rho^4 (1 - 2\rho^2) \right) \alpha \cdot \right. \\
 & \cdot \left((-3b^2 R \alpha) \cos(2\theta - \mu) + 3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) a^2 b^2 \sin(2\theta + \mu) + 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) R a^2 b^2 \sin(2\theta - \mu) + \right. \\
 & \left. \left. + (b^2 - a^2) \alpha^2 \sin(2\theta) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right) + \\
 & + \frac{1}{6} \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N a^2 b^2} \left((\beta^2 \rho^2) (2\beta^2 \rho^2 - 2\beta^4 \rho^2 + 3\rho^4 \beta^2 - 4\rho^4 + \beta^2 + 2\beta^6 (1 - \rho^2) - \beta^6 + \rho^6) \cdot \right. \\
 & \cdot \left(\cos(2\theta + \mu) (-6R' \alpha a^2 b^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sin(2\theta + \mu) (6R' \alpha a^2 b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + 3 \sin(2\theta) (a^2 - b^2) \cdot \right. \\
 & \left. \left. \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \alpha^3 (\cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) + \alpha^3 (\cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) - 1 \right) \right) \right) \Bigg), \\
 \tau_{\rho\theta}^{(I)e} = & \frac{2(\alpha^4 - 1)(3\rho^4 + \beta^4)}{\rho^3(\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \sin \theta}{a^2} - \frac{B \cos \theta}{b^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{3} \frac{1}{\rho^4 N a^2 b^2} \left(\left((\beta^4 \rho^4) (1 - \beta^2 + 3\rho^2 - 4\rho^2 \beta^2) + \beta^6 (\beta^2 - 1) + \rho^6 \right) \cdot \right. \\
 & \cdot \left(\cos(2\theta + \mu) (-6R' \alpha a^2 b^2) \cdot \left(\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) + 3 \cos(2\theta) (a^2 - b^2) \cdot \right. \\
 & \left. \left. \cdot \left(\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{3} \alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 1 \right) \right) \right) \Bigg).
 \end{aligned} \tag{25}$$

На основании (14), (15) в первом приближении для границы упругопластической области получим

$$\rho'_s = \frac{\sigma'_\theta{}^p - \sigma'_\theta{}^e}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{4}(\sigma'_\theta{}^e - \sigma'_\theta{}^p). \quad (26)$$

Границу упругопластической области в первом приближении получим из (22), (25), (26):

$$\rho'_s = \frac{1}{4}(\sigma'_\theta{}^e - \sigma'_\theta{}^p) = \frac{1}{4}(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 - N_5 - N_6 - N_7), \quad (27)$$

где

$$M_1 = -\frac{2(b^2 A^2 + a^2 B^2)(\rho^2 + \beta^2) \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{(\beta^2 - 1)a^2 b^2 \rho^2}, M_2 = \frac{2(\alpha^4 - 1)(3\rho^4 + \beta^4)}{\rho^3(\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \cos \theta}{a^2} + \frac{B \sin \theta}{b^2} \right),$$

$$M_3 = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta^4 \rho^4 N a^2 b^2} \left(((\beta^4 \rho^4)(\beta^2 - 2\beta^4 + \rho^2 \beta^2 - 4\rho^2) + \beta^4(3 - 2\beta^2 - \beta^4) + \rho^4(1 - 2\rho^2)) \alpha \cdot \right. \\ \left. \cdot \left((-3b^2 R' \alpha + 3b^2 a^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) \cos(2\theta + \mu) + (3a^2 b^2 R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) \cos(2\theta - \mu) + \right. \right. \\ \left. \left. + (b^2 - a^2) \alpha^2 \cos(2\theta) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right),$$

$$M_4 = \frac{1}{3} \frac{1}{\rho^4 N a^2 b^2} \left(((\beta^4 \rho^4)(1 - \beta^2 + 3\rho^2 - 4\rho^2 \beta^2) + \beta^6(\beta^2 - 1) + \rho^6) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\cos(2\theta + \mu)(-6R' \alpha a^2 b^2) \cdot (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) + 3 \cos(2\theta)(a^2 - b^2) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{3} \alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 1 \right) \right) \right),$$

$$N_1 = -\frac{2\alpha^4}{a^2 b^2 \rho} (b^2 a \cos \theta + a^2 b \sin \theta), N_2 = -R' \cos(2\theta + \mu) \left(\frac{\alpha}{\rho} \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) \cos(2\theta - \mu) + 1 \right),$$

$$N_3 = \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \cos(2\theta)(a^2 - b^2) \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right)}{3a^2 b^2 \rho}, N_4 = \frac{\alpha R' \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}\right) \cos(2\theta - \mu)}{\rho},$$

$$N_5 = \left(\frac{a^2 + b^2}{6a^2 b^2 \rho} \right) (9\rho^3 - 3\alpha^2 \rho), N_6 = \left(\frac{b^2 A^2 + a^2 B^2}{6a^2 b^2 \rho} \right) \left(12\rho \left(\ln \frac{\rho}{\alpha} + 1 \right) \right),$$

$$N_7 = \frac{6\rho}{a^2 b^2} (b^2 a \cos \theta + a^2 b \sin \theta).$$

Граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближениях при $b = 3$, $r = 1$, $a = 2$, $\mu = 0.3$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 2$, $N = 5$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$ представлена на рис. 2.

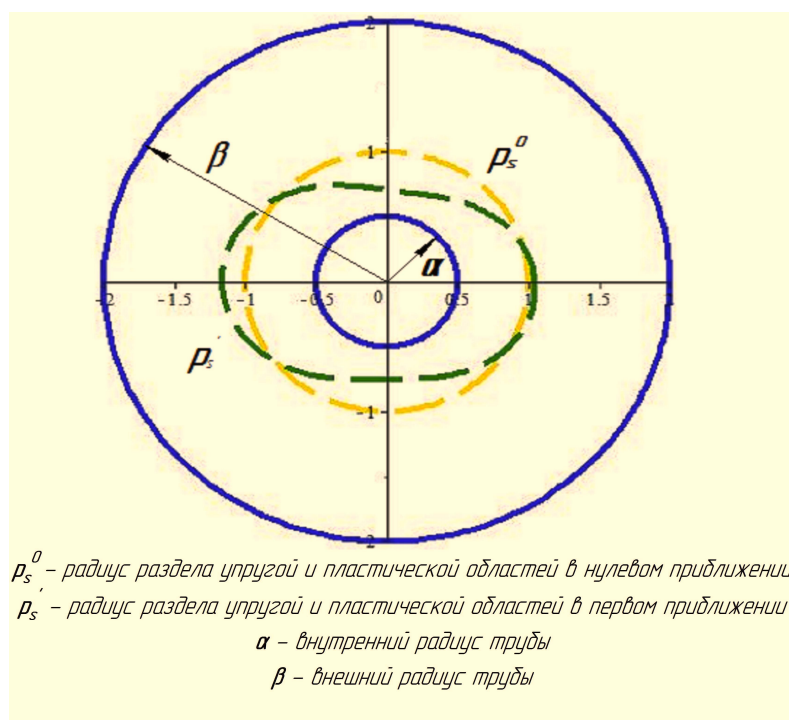


Рис. 2. Граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближениях

Резюме. Определено напряженное состояние в пластической (22) и упругой (25) зонах. Изменение границы пластической зоны находится из соотношений (27).

В отличие от предыдущих работ материал в пластической области предполагается обладающим свойствами неоднородности и трансляционной анизотропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев, Н. М. Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах / Н. М. Беляев, А. К. Синицкий // Изв. АН СССР (ОТН). – 1938. – № 2. – С. 320–333.
2. Бриджмен, П. Исследование больших пластических деформаций и разрывов / П. Бриджмен. – М. : ИЛ, 1995. – 444 с.
3. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
4. Ивлев, Д. Д. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). Ч. 3. – С. 583–584.
5. Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 377 с.
6. Кузнецов, П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусосном растяжении / П. Н. Кузнецов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1. – С. 134–141.
7. Максимова, Л. А. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.

8. *Митрофанова, Т. В.* Об условиях трансляционной анизотропии идеальнопластических тел при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). Ч. 3. – С. 596–600.
9. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
10. *Фоминых, С. О.* Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). Ч. 3. – С. 623–627.
11. *Фоминых, С. О.* Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 211–226.